Chapitre

Les ensembles

I Notion d'ensemble

1 Définition et exemples

Définition

Nous appellerons ensemble une collection d'objets. Chacun de ces objet est appelé élément de l'ensemble.
Si un élément a fait partie d'un ensemble E, on dira que a appartient à E, ou E contient a, et on notera : $a \in E$ Si a n'appartient pas à E, on notera : $a \notin E$

Exemple

1. $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels, $\{0;1;2;3;4;.....\}$.
2. $\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs,$\{.....;-3;-2;-1;0;1;2;3;.....\}$.
3. L'ensemble des diviseurs de 12 est : $D_{12} = \{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$.
4. L'ensemble des lettres constituant le mot logique est : $\{l;o;i;g;u,q,e\}$.

2 Construire des ensembles

a Définition en extension

On peut définir un ensemble fini en énumérant les éléments qui le constituent.
Par exemple : $\{1;2;3;4;5\}$ est un ensemble constitué des 5 éléments $1,2,3,4$ et 5.
On utilisera des accolades pour délimiter les éléments de l'ensemble. L'ordre des éléments, et le fait qu'ils soient redoublés n'a aucune importance dans la définition de l'ensemble.

b Définition en compréhension

On s'appuie sur un ensemble déjà existant, dont on sélectionne les éléments vérifiant une certaine propriété. Par example :

1. $\{n \in \mathbb{N} \ / \ \exists\, k \ \in \ \mathbb{N} n = 2k\}$ est l'ensemble des entiers pairs.
2. $[a\ ,\ b] = \{x \in \mathbb{R} / \ a \leqslant x \leqslant b\}$
3. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \ / \ p \in \mathbb{Z} \ et \ q \in \mathbb{N}^*\right\}$

Application

On considère les deux ensembles suivants : $A = \left\{x \in \mathbb{N} / \frac{3x+2}{x-2} \in \mathbb{Z}\right\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{N} / \frac{5x+7}{x-1} \in \mathbb{N}\right\}$.
Déterminer en extension les ensembles A et B.

Yassine Elamri

c Un ensemble particulier

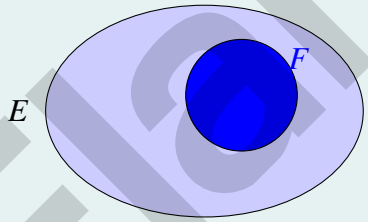
On considère en mathématiques, qu'il y a un unique ensemble, appelé ensemble vide, qui ne contient aucun élément, et qui est noté $\emptyset$ Si on considère un élément x quelconque, on a forcément $x \notin \emptyset$

II Inclusion d'ensembles

Définition

On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E.
On note : $F \subset E$ et on lit :

1. F est inclus dans l'ensemble E.
2. F est contenu dans l'ensemble E.
3. F est une partie de l'ensemble E.
4. F est un sous ensemble de l'ensemble E.



Et on note aussi $F \not\subset E$ et on lit : F n'est pas inclus dans l'ensemble E.
$F \not\subset E$ est la négation de $F \subset E$.
$F \not\subset E$ signifie qu'il existe au moins un élément de F qui n'appartient pas à E.

Remarque

1. D'après la définition précédente, tout ensemble E est inclus dans lui même : $E \subset E$.
2. Lorsque le sous-ensemble F est strictement inclus dans l'ensemble E on dit que F est un sous-ensemble propre de E . On doit alors le préciser par la conjonction des deux propriétés : $F \subset E$ et $F \neq E$.
3. L'ensemble vide est contenu dans tout ensemble E : $\emptyset \subset E$
4. Ne pas confondre l'appartenance qui est une relation entre un élément et un ensemble et l'inclusion qui est une relation entre deux ensembles.
   Par exemple, on aura a $x \in \{x;y;z;t\}$ mais $\{x\} \subset \{x;y;z;t\}$.
5. soient E et F deux sous-ensembles de A, on a : $F \subset E \Leftrightarrow (\forall x \in A, \quad x \in F \Rightarrow x \in E)$

Méthode

1. Pour démontrer qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E on prend un élément x quelconque de F , on utilise les hypothèses qui définissent l'ensemble F et on démontre que x vérifie les propriétés qui définissent l'ensemble E La démonstration prend donc la structure suivante :
   Soit x un élément de l'ensemble F
   .....
   (raisonnement)
   .....
   donc x est un élément de l'ensemble E
   Conclusion : $F \subset E$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Pour démontrer que $F \not\subset E$, Il suffit de trouver un élément de F qui n'est pas dans l'ensemble E (un contre-exemple suffit).

• Exemple

1 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$; $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2 $\{n \in \mathbb{N} \,/\, \exists p \in \mathbb{N} \quad n = 2p\} \subset \mathbb{N}$.

3 $\{2;3;4\} \subset \{2;3;4;5;6;7\}$.

1 Égalité de deux ensembles

Définition

Deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments. Cela se traduit par deux inclusions simultanées :

$$E = F \Leftrightarrow (F \subset E \quad et \quad E \subset F)$$

Remarque

Pour démontrer l'égalité de deux ensembles E et F il faudra faire deux démonstrations d'inclusion, d'une part pour démontrer $F \subset E$ d'autre part pour démontrer $E \subset F$.

• Exemple

On considère les deux ensembles suivants : $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \left|1 - \frac{x}{2}\right| \prec 1\right\}$ et $B =]0\,;\,4[$.

$x \in A \Leftrightarrow \left|1 - \frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{x}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < -\frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{2} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \Leftrightarrow x \in B$

D'où $A = B$

2 Transitivité de l'inclusion

Propriété

A, B, et C étant trois ensembles, si le premier ensemble A est contenu dans le second B et si le deuxième ensemble B est contenu dans le troisième C, alors le premier ensemble A est contenu dans le troisième C ; on dit que l'inclusion est transitive .

On a : $A \subset B \quad et \quad B \subset C \quad \Rightarrow \quad A \subset C$

EXEMPLES

A faire

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Opérations sur les ensembles

1 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble.
L'ensemble des parties de E est l'ensemble, généralement noté $\mathscr{P}(E)$, dont les éléments sont les sous-ensembles de E et on a : $A \in \mathscr{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$.

Remarque

$\mathscr{P}(E)$ n'est jamais vide car l'ensemble vide $\emptyset$ et E sont toujours des parties de E :

$$\emptyset \in \mathscr{P}(E) \quad \text{et} \quad E \in \mathscr{P}(E) .$$

Exemple

1. Soit $E = \{a;b;c\}$ un ensemble de trois éléments. Les sous-ensembles de E sont :
   a. $\emptyset$ et E .
   b. les trois singletons $\{a\}$; $\{b\}$ et $\{c\}$.
   c. les trois paires $\{a;b\}$; $\{a;c\}$ et $\{b;c\}$.

   L'ensemble des parties de E est donc :

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset;\{a\};\{b\};\{c\};\{a;b\};\{a;c\};\{b;c\};E\}$$

2. $\mathbb{Z} \in \mathscr{P}(\mathbb{Q})$.
3. $]-\pi\,;\,\pi] \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Application

Déterminer en extension l'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{a;b;1;2\}$

2 Complémentaire d'un ensemble

Définition

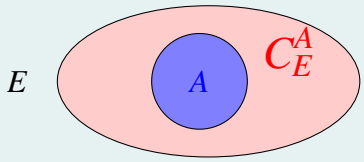
Si A est une partie de l'ensemble E, on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

On note le plus souvent le complémentaire de A par C_E^A ,et aussi parfois par $\overline{A}$.

$C_E^A = \{x \in E \;/\; x \notin A\}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



• Exemple

1. $C_{\mathbb{N}}^{\{0\}} = \mathbb{N}^\star$.
2. $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}^*} = \mathbb{Z}^-$.
3. $C_E^{\emptyset} = E$.
4. $\overline{\overline{A}} = A$.
5. Si $A = \{a;b\}$ et $E = \{a;b;c;d;e\}$ alors : $C_E^A = \{c;d;e\}$.

Propriété

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E. On a : $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

EXEMPLES

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E, \quad x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \quad x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Application

On considère les deux ensembles : $A = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| \succ 3\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{|x|}{1+x^2} \leqslant 2\right\}$.

1. Écrire en compréhension $\overline{A}$ et $\overline{B}$, les complémentaires respectivement de A et de B dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que : $\overline{A} \subset \overline{B}$

3 Intersection d'ensembles

Définition

Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathscr{P}(E)$.
On appelle intersection de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble $\{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$

• Exemple

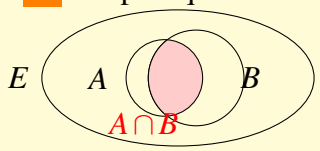
1. Soient D_{12} et D_{16} respectivement l'ensemble des diviseurs de 12 et celui de 16 .
   On a $D_{12} = \{1;2;3;4;6;12\}$ et $D_{16} = \{1;2;4;8;16\}$. Donc $D_{12} \cap D_{16} = \{1;2;4\}$
2. Soit $A = \{2n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ et soit $B = \{3n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$. On a $A \cap B = \{6n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$.

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Remarque

1. $A \cap B$ est constitué des éléments communs à l'ensemble A et à l'ensemble B.
2. En pratique on a : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ *et* $x \in B$



Propriété

Soit E un ensemble.
Soient A, B et $C \in \mathscr{P}(E)$. On a :

1. $A \cap B \in \mathscr{P}(E)$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cap E = E \cap A = A$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap \emptyset = \emptyset$
6. $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
7. $A \cap A = A$
8. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
9. $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Application

Considérons les deux ensembles : $C = \left\{\frac{-\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \; ; \; k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $D = \left\{\frac{-\pi}{3} + \frac{k\pi}{3} \; ; \; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Montrer que $C \cap D = \emptyset$.

Définition

Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathscr{P}(E)$.
On dit que A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

4 Réunion d'ensembles

Définition

Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathscr{P}(E)$.
On appelle réunion (ou plus simplement union) de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble défini par : $\{x \in E \,/\, x \in A \; ou \; x \in B\}$

Yassine Elamri

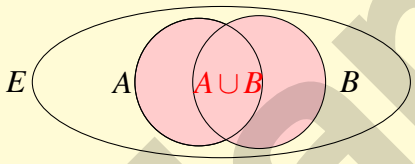
Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exemple

1. Soit $A=\{a;b;c;d\}$ et soit $B=\{x;b;y;d;z\}$.
   On a $A\cup B=\{a;b;c;d;x;y;z\}$
2. Soit $I=[2\ ,\ 8[$ et soit $J=[-1\ ,\ 3]$.
   On a $I\cup J=[-1\ ,\ 8[$

Remarque

1. $x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A\ \vee\ x\in B$
2. $A\cup B=\emptyset\Rightarrow A=\emptyset\ \wedge\ B=\emptyset$



Propriété

Soit E un ensemble. Soient A, B et $C\in\mathscr{P}(E)$. On a :

1. $A\cup B\in\mathscr{P}(E)$
2. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
3. $A\cup\emptyset=\emptyset\cap A=A$
4. $A\cup B=B\cup A$
5. $A\cup E=E$
6. $A\subset A\cup B\quad et\quad B\subset A\cup B$
7. $A\cup A=A$
8. $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subset A$
9. $A\cup\overline{A}=E$

5 Distributivité et lois de De Morgan

Propriété

Soit E un ensemble et soient A , B et $C\in\mathscr{P}(E)$. On a :

1. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)$
2. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap B)$
3. $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$
4. $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

EXEMPLES

- $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ *ou* $x \in B \cap C$
  $\Leftrightarrow x \in A$ *ou* $(x \in B$ *et* $x \in C)$
  $\Leftrightarrow (x \in A$ *ou* $x \in B)$ *et* $(x \in A$ *ou* $x \in C)$
  $\Leftrightarrow (x \in A \cup B)$ *et* $(x \in A \cup C)$
  $\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

D'où $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$

- $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ *et* $x \in B \cup C$
  $\Leftrightarrow x \in A$ *et* $(x \in B$ *ou* $x \in C)$
  $\Leftrightarrow (x \in A$ *et* $x \in B)$ *ou* $(x \in A$ *et* $x \in C)$
  $\Leftrightarrow (x \in A \cap B)$ *ou* $(x \in A \cap C)$
  $\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

D'où $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$

- $x \in \overline{(A \cap B)} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$
  $\Leftrightarrow x \notin A$ *ou* $x \notin B$
  $\Leftrightarrow x \in \overline{A}$ *ou* $x \in \overline{B}$
  $\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

D'où $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- $x \in \overline{(A \cup B)} \Leftrightarrow x \notin A \cup B$
  $\Leftrightarrow x \notin A$ *et* $x \notin B$
  $\Leftrightarrow x \in \overline{A}$ *et* $x \in \overline{B}$
  $\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

D'où $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Application

Soient A , B et C des parties de l'ensemble E.

1. Montrer que : $A \subset B \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
2. Montrer que : $A \cup B \subset [(A \cap C) \cup (B \cap \overline{C})]$.

6 Différence et différence symétrique de deux ensembles

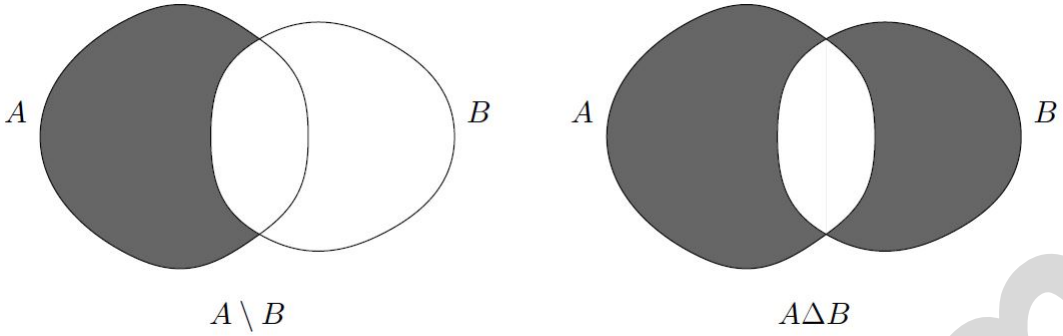
Définition

Soit E un ensemble, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(E)$. On note :

1. L'ensemble A privé de B noté $A \setminus B$ est défini par $\{x \in E / x \in A$ *et* $x \notin B\}$ et on l'appelle différence de A et$B$.
2. $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et on l'appelle différence symétrique de A et B.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

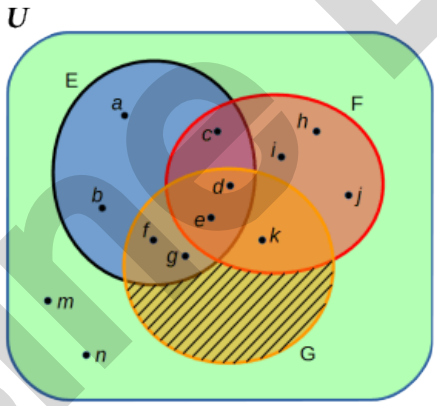


$A \setminus B$ $A\Delta B$

• Exemple

On considère les deux ensembles $A = \{1;2;5;6;9;10\}$ et $B = \{2;3;5;7;8;9\}$.

1. $A \setminus B = \{1;6;10\}$.
2. $A\Delta B = \{1;3;6;7;8;10\}$.
3. Dans le référentiel U représenté ci dessous, on a : $E\Delta F = \{a,b,f,g,h,i,j,k\}$



Remarque

1. La différence symétrique correspond au "ou" exclusif $A \triangle B$ est : l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B, mais PAS à A et B en même temps.
2. Si $B \subset A$ alors la différence de A et B est aussi le complémentaire de B dans A.
3. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
4. $A \subset B$ si et seulement si $A \setminus B = \emptyset$
5. La différence symétrique $A \triangle B$ est aussi égale à $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Étant données A, B et C trois parties d'un ensemble E, montrer que :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

1. $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$.
2. $A\backslash B = A \Leftrightarrow B\backslash A = B$.
3. $A\Delta B = A \cap B \Rightarrow A = B = \emptyset$

7 Produit cartésien

a Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien (ou simplement produit) de E par F et on note $E \times F$ l'ensemble des couples ordonnés $(x;y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.

$$A \times B = \{(x;y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$$

avec la convention : $A \times B = \emptyset$ si $A = \emptyset$ *ou* $B = \emptyset$

Attention : l'ordre des éléments dans le couple est important : $(2;3) \neq (3;2)$

• Exemple

Soit $A = \{1;3\}$ et $B = \{2;3;6\}$. Alors, $A \times B = \{(1;2);(1;3);(1;6);(3;2);(3;3);(3;6)\}$

On note : $A^2 = A \times A$ (appelé carré cartésien de A).

Remarque

1. $u \in E \times F \Leftrightarrow \exists x \in E$ *et* $\exists y \in F / u = (x;y)$
2. On définit l'égalité sur $E \times F$ par : $(x;y) = (x';y') \Leftrightarrow x = x'$ *et* $y = y'$
3. $E \times F = \emptyset \Leftrightarrow E = \emptyset$ *ou* $F = \emptyset$

Application

A , B et C sont des trois parties d'un ensemble non vide E , montrer que :

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
2. $C_{E\times E}^{A\times B} = \left(C_E^A \times E\right) \cup \left(C_E^B \times E\right)$

b Produit cartésien de trois ensembles

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Définition

Le produit cartésien de trois ensembles est défini par :

$$A \times B \times C = \{(a;b;c) / a \in A \ ; \ b \in B \ et \ c \in C\}$$

Le produit $A \times A \times A$ est appelé cube cartésien de A et il est noté A^3 .

Les définitions précédentes se généralisent en définissant le produit cartésien d'une famille d'ensembles $(A_1;A_2;.....;A_n)$ que l'on note habituellement $\prod_{i=1}^{n} A_i$

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1;a_2;.....;a_n) / a_1 \in A_1 \ ; \ a_2 \in A_2 \ ; .....et \ a_n \in A_n\}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today