Les application

Série d'exercices

Exercice : 1

On considère la relation f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \frac{x^2}{3x-1}$$

1. f est-elle une application ? Sinon, quelle est la condition pour qu'elle soit application ?
2. Déterminer, dans ce cas, les antécédents des nombres suivants -2 , 3 et 0.

Exercice : 2

On considère l'application

$$k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow]-\infty;1[$$
$$x \longrightarrow \frac{x-2}{x}$$

1. Déterminer $k(]0;1[\cup]3;4])$
2. Déterminer $k^{-1}([0;1[)$ et $k^{-1}(]-3;-2]\cup[0;1[)$

Exercice : 3

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}-\{1\}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(s)=\frac{2x+5}{x-1}$

1. Montrer que f est une application injective.
2. Déterminer $f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$.
3. Déterminer $f(]1;+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty;2])$

Yassine Elamri

Exercice : 4

Dans chacun des cas suivantes, Montrer que les applications f et g sont égales.

1

$$\begin{aligned} f : [0;1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (-1)^{E(x)}(x - E(x)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : [0;1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} f :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow 1 - (\cos(x) - \sin(x))^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} \end{aligned}$$

Exercice : 5

On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = 2x - |x| + 4 \end{aligned}$$

1 Déterminer $f_{]-\infty;0]}$ la restriction de l'application f à l'intervalle $]-\infty;0]$

2 Déterminer $f_{[0;+\infty[}$ la restriction de l'application f à l'intervalle $[0;+\infty[$

Exercice : 6

On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x - \sqrt{x} \end{aligned}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

1. Montrer que f n'est pas injective.
2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = -1$.
   b. Que peut-on conclure ?
3. Soit g la restriction de f à $[\frac{1}{4}; +\infty[$
   a. Montrer que g est bijective de $[\frac{1}{4}; +\infty[$ à un intervalle J qu'il faut déterminer
   b. Déterminer l'application réciproque g^{-1}

Exercice : 7

Soit f une application définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 - 8x + 7 \end{aligned}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 7$ f est- elle injective ?
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,; f(x) \geq -9$ f est- elle surjective ?
3. Soit g la restriction de f à $]-\infty; 4]$
   a. Prouver que g est bijective de $]-\infty; 4]$ vers $[-9; +\infty[$
   b. Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout x de $[-9; +\infty[$

Exercice : 8

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) &\longrightarrow (3x - y; x - 3y) \end{aligned}$$

Montrer que f est bijective, et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

Exercice : 9

Soient A et B deux parties non vide d'un ensemble E.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

On considère l'application

$$f : P(E) \longrightarrow P(E) \times P(E)$$
$$X \longrightarrow (X \cup A; X \cup B)$$

1 a Calculer $f(\varnothing)$ et $f(A \cap B)$

b Montrer que :

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow A \cap B = \varnothing$$

2 Montrer que f n'est pas surjective.

Exercice : 10

On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+2}$$

1 a Montrer que l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}^+$.

b f est-elle surjective ?

c Montrer que f est injective

2 On considère l'application

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}[$$
$$x \longrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+2}$$

a Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : g(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$

b En déduire que $g^{-1}\left([-\frac{3}{2}; -\frac{5}{6}]\right) = [0; \frac{1}{4}]$

c Montrer que $g(\mathbb{R}^+) = [-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}[$

d Déduire que l'application g est bijective, et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice : 11

On pose $I =]0;+\infty[$ et on considère l'application f définie par :

$$f : I \times I : \longrightarrow I \times I$$
$$(x;y) : \longrightarrow f(x;y) = \left(xy; \frac{x}{y}\right)$$

1. Montrer que f est injective et surjective.
2. En déduire que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice : 12

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 2x + 5$ et $g(x) = 2x - 6$
2. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ et $g(x) = 5x + 4$
3. $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ et $g(x) = 3 - x^2$

Exercice : 13

On considère l'application

$$f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x-1}$$

1. a. Déterminer $f^{-1}\left(\{-\frac{1}{2}\}\right)$.
   b. l'application f est-elle injective ? justifier.
2. a. Montrer que $f([1;+\infty[) = [0;+\infty[$.
   b. l'application f est-elle surjective ?
3. On considère l'application

$$g : [0;+\infty[\longrightarrow]-1;+\infty[$$
$$x \longrightarrow x^2 - 2x$$

Déterminer une application h telles que $f = g \circ h$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice : 14

On pose

$$f : [1;+\infty[\longrightarrow [1;+\infty[$$
$$x \longrightarrow x+\sqrt{x^2-x}$$

1. Vérifier que f est une application.
2. Montrer que f est bijective puis déterminer l'application réciproque f^{-1}.
3. Soit

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2+1$$

   a. Montrer que $g(\mathbb{R}) \subset [1;+\infty[$
   b. Déterminer $f \circ g(x)$ pur tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice : 15

On considère l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \sqrt{x^2-x+1}$$

1. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(1-x) = f(x)$
   b. l'application f est-elle injective ?
2. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
   b. l'application f est-elle surjective ?
3. Soient g et h les restrictions de f aux intervalles $I =]\frac{1}{2};+\infty[$ et $J =]-\infty;\frac{1}{2}[$ respectivement
   a. Montrer que g réalise une bijection de I sur l'intervalle $K =]\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty[$, puis définir g^{-1}.
   b. On considère l'application

$$h : J \longrightarrow I$$
$$x \longrightarrow 1-x$$

Vérifier que $h = g \circ k$ et en déduire que h est bijective puis déterminer h^{-1}.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice : 16

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :$(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(3x) = 2f(x)$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{3^n}\right)$
2. Calculer $f(2007)$ sachant que $f(223) = 2006$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today