Chapitre

Les application

Capacités attendues

1. Déterminer l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une application ;
2. Déterminer la bijection et la bijection réciproque d'une application et son utilisation dans la résolution de problèmes ;
3. Déterminer la composée de deux applications et la décomposition d'une application en deux applications en vue d'explorer ses propriétés ;

Recomandations pédagogiques

1. la réorganisation, le renforcement des connaissances des élèves, ses applications au cours de l'année
2. l'investissement de résultats de ce cours chaque fois que l'occasion se offerte dans les prochains chapitres.

Contenus

1. Égalité de deux applications ;
2. Image et image réciproque d'une partie par une application ;
3. Restriction et prolongement dune application ;
4. Application injective, application surjective ; application bijective ; application réciproque d'une bijection ;
5. Composée de deux applications ;

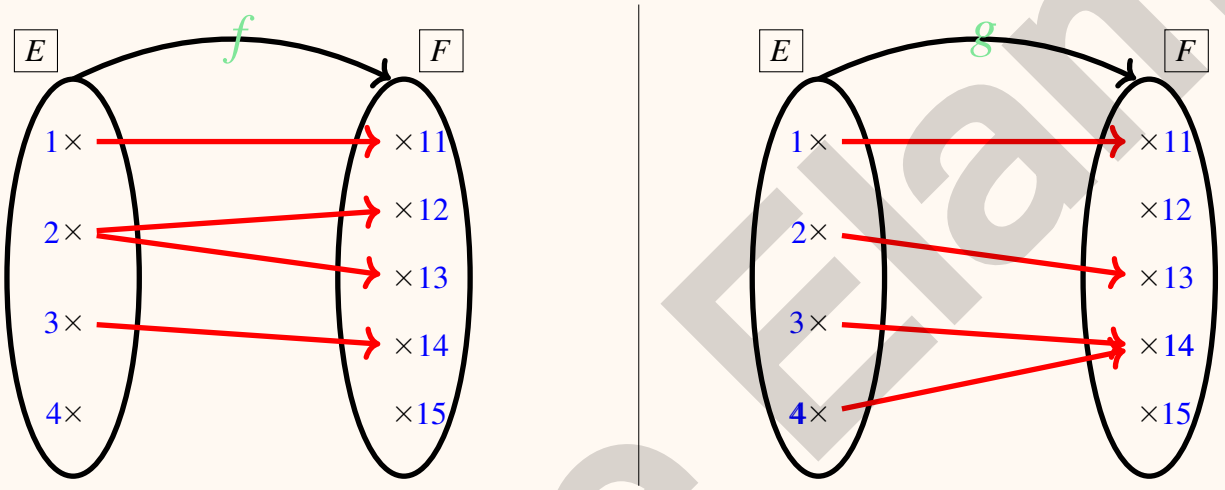
Yassine Elamri

I Généralités

1 Application d'un ensemble vers un autre

Activité

On considère les ensembles $E = \{1;2;3;4\}$ et $F = \{10;11;12;13;14\}$, et on considère la relation f (ou g) qui associe les éléments de E par les élément de F, voir figures (diagramme sagittale).



Que remarquez vous ?

$\Longrightarrow$ f n'est pas une application de E vers F.

$\Longrightarrow$ g est une application de E vers F.

Définition

Soient E et F deux ensembles non vides. Toute relation f qui associe chaque élément x de E par un et un seul élément y de F est appelée application de E vers F , on le note par :

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Vocabulaire

1. L'ensemble E est appelé L'ensemble de départ de l'application f.
2. L'ensemble F est appelé l'ensemble d'arrivé de l'application f.
3. $y = f(x)$ s'appelle l'image de x
4. $y = f(x)$; x s'appelle l'antécédent de y

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Remarque

1. Toute fonction est une application de son ensemble de définition D_f vers $\mathbb{R}$
2. Tout application $f : E \longrightarrow F$ est une fonction $f : E \longrightarrow F$
3. f est une application de E vers $F \iff (\forall x \in E) \quad (\exists! y \in F) : f(x) = y$

• Exemple

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \{-1;1\}$$
$$n \longrightarrow (-1)^n$$

est une application de $\mathbb{N}$ vers $\{-1;1\}$.

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

n' est pas une application car 0 na pas d'image

Application

1. On considère la fonction numérique h définie par

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \sqrt{1-x}$$

   a. La fonction h est-elle une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
   b. Déterminer un ensemble E pour que la fonction h soit une application de E vers $\mathbb{R}$.

2. On considère les ensembles $E = \{-\sqrt{3};-1;0;\sqrt{3}\}$ et $F = \{0;1;3\}$
   a. Définir une application de E vers F
   b. Définir une application de F vers E

2 Égalité de deux applications

Activité

Soient les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longrightarrow (-1)^n.n$$

et

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longrightarrow \begin{cases} n & \text{si n est pair} \\ -n & \text{si n est impair} \end{cases}$$

vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(n) = g(n)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F'$ deux applications, on dit que f et g sont égaux et on écrit $f = g$ si :

1. $E = E'$ et $F = F'$
2. $(\forall x \in E) : f(x) = g(x)$

• Exemple

Soit f et g deux applications définies par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \sqrt{4x^2-4x+1} - \sqrt{4x^2-12x+9}$$

et

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow 2\left(|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{3}{2}|\right)$$

On montre facilement que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = g(x)$. Puisque f et g ont le même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée et $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Application

Dans chacun des cas suivants, montrer que f et g sont égaux.

1. $$f :]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$$ et $$f :]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$
2. $$f :]0;\pi[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$$ et $$f :]0;\pi[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

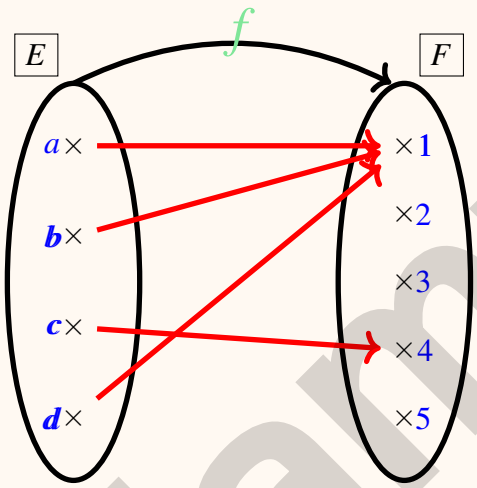
3 Image directe et Image réciproque d'une partie d'un ensemble

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Activité

Soit lapplication dont le diagramme sagittal est représenté ci-contre



1. Déterminer les images directe des éléments des ensembles $\{a;b;c\}$, $\{a;c\}$ et E.
2. Déterminer les antécédents des éléments qui appartiennent aux ensembles $\{1\}$, $\{1;3\}$ et $\{1;4\}$.

Activité

Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow 2x^2 - x$$

1. Montrer que : $(\forall x \in [-1;1]) : f(x) \in [\frac{-3}{16};3]$
2. Montrer que : $(\forall y \in [\frac{-3}{16};3])\,(\exists x \in [-1;1])\, f(x) = y$

$\Longrightarrow$ On dit que l'intervalle $[\frac{-3}{16};3]$ est l'image de l'intervalle $[-1;1]$ par l'application f, et on écrit :

$$f([-1;1]) = \left[\frac{-3}{16};3\right]$$

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour tout partie A de E, on définit l'image directe de A par f noté $f(A)$ et définie par.

$$f(A) = \{f(x) \,/\, x \in A\}$$

on écrit :

$$(\forall y \in F) : y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A) : y = f(x)$$

• Exemple

1. Soit f l'application définie par :

$$f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^2 + 2$$

   a. Déterminer $f(A)$ où $A = \{-1;0;2;4\}$ et $A = [1;2]$
   b. Montrons que $f([0;+\infty[) = [2;+\infty[$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Soit g l'application définie par :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longrightarrow g(x) = 2n \end{aligned}$$

Déterminer $f(A)$ où $A = \{0;1;2;5\}$ et $A = \mathbb{N}$.

Application

1 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

a vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

b Montrer que $f(\mathbb{R}) = [\frac{7}{4}; +\infty[$

2 On considère l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{3x-1}{x+1} \end{aligned}$$

a vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) : h(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$

b Déterminer $h(]-\infty; -1])$.

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A et B deux parties de E $(A, B \subset E)$, on a :

1 $f(A) \subset F$

2 $A = \varnothing \Leftrightarrow f(A) = \varnothing$

3 $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

4 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

5 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Exemples

1 Puisque $f : E \longrightarrow F$ est une application et $A \subset E$. Alors $f(A)$ est une partie de F, c-à-d $f(A) \subset F$.

2 (évident)

3 On suppose que $A \subset B$ et on montre que $f(A) \subset f(B)$
soit $y \in f(A)$, on a $y \in f(A) \Longleftrightarrow (\exists x \in A) : y = f(x) \quad (1)$
$(1) \Longrightarrow (\exists x \in B) : y = f(x)$ car $(A \subset B)$
par suite $y = f(x) \in f(B)$
finalement $f(A) \subset f(B)$

4 on a $A \subset A \cup B$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

alors $f(A) \subset f(A \cup B)$ (d'après 2)
et on a $B \subset A \cup B$
alors $f(B) \subset f(A \cup B)$ (d'après 2)
d'où :

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \quad (*)$$

Réciproquement, montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
soit $y \in f(A \cup B)$ alors $\exists x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$
alors $\exists x \in A / y = f(x)$ ou $\exists x \in B / y = f(x)$
alors $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$
alors $y \in f(A) \subset f(B)$ d'où :

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) \quad (**)$$

de $(*)$ et $(**)$, on déduire que :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

5 on a $A \cap B \subset A$, alors $f(A \cap B) \subset f(A)$ (d'après 3).
et on a $A \cap B \subset B$, alors $f(A \cap B) \subset f(B)$ (d'après 3).
d'où

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour tout partie B de F, on définit l'image réciproque de B par f, noté $f^{-1}(B)$ par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

on a donc :

$$(\forall x \in E) : x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Exemple

1 Considérons l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^2$$

- $f^{-1}(\{1\}) = \{-1;1\}$ car $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1)$
- $f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$ car $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
- $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = \varnothing$ ca l'inéquation $f(x) < 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
- de même on peut montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}_-) = \{0\}$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f^{-1}[0;2] = [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

2 Soit l'application définie par :

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^2 + 2$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Montrer que $f^{-1}([6;11]) = [2;3]$
Soit $x \in [0;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([6;11]) &\Longleftrightarrow 6 \leq f(x) \leq 11 \\ &\Longleftrightarrow 6 \leq f(x) \leq 11 \\ &\Longleftrightarrow 6 \leq x^2+2 \leq 11 \\ &\Longleftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 9 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{4} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{9} \\ &\Longleftrightarrow 2 \leq |x| \leq 3 \\ &\Longleftrightarrow 2 \leq x \leq 3 \quad (x \geq 0) \\ &\Longleftrightarrow x \in [2;3] \end{aligned}$$

d'où : $f^{-1}([6;11]) = [2;3]$

Remarque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $B \subset F$

1. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $f^{-1}(F) = E$
2. $\forall y \in F : f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E / f(x) = y\}$
3. $f^{-1}(B) = \varnothing$ ne signifier pas que $B = \varnothing$

• Exemple

Soit g l'application définie par :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sin(x) \end{aligned}$$

Déterminer $g^{-1}([2;3])$
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}([2;3]) &\Longleftrightarrow g(x) \in [2,3] \\ &\Longleftrightarrow 2 \leq \sin(x) \leq 3 \end{aligned}$$

ce qui est impossible (car $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sin(x) \in [-1;1]$).
D'où $g^{-1}([2;3]) = \varnothing$ mais $[2;3]$ n'est pas vide.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A et B deux parties de F $(A, B \subset F)$, on a :

1. $f^{-1}(A) \subset E$
2. $A \subset B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Exemples

1. Puisque $f : E \longrightarrow F$ est une application et $A \subset F$. Alors $f^{-1}(A)$ est une partie de E, c-à-d $f^{-1}(A) \subset E$.
2. On suppose que $A \subset B$ et on montre que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

$$\begin{aligned} \text{soit } x \in f^{-1}(A) &\Longleftrightarrow f(x) \in A \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in B \qquad (\text{car } A \subset B) \\ &\Longleftrightarrow x \in\in f^{-1}(B) \end{aligned}$$

D'où

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

3. Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} \text{on a } x \in f^{-1}(A \cup B) &\Longleftrightarrow f(x) \in A \cup B \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in A \quad \text{ou} \quad f(x) \in B \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(B) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

D'où

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

4. Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} \text{on a } x \in f^{-1}(A \cap B) &\Longleftrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in A \quad \text{et} \quad f(x) \in B \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \quad \text{et} \quad x \in f^{-1}(B) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

D'où

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Application

1. Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 - 2x \end{aligned}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Déterminer $f^{-1}([-1;0])$ et $f^{-1}([2;+\infty[)$

2 Considérons l'application

$$g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow 2 + \frac{1}{x}$$

Déterminer $f^{-1}([1;2[)$ et $f^{-1}(]7;+\infty[)$

II Restriction d'une application- prolongement d'une fonction

1 Restriction d'une application

Activité

Considérons l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2 + |x-1|$$

1 Déterminer l'expression de f à $[1;+\infty[$

2 Déterminer l'expression de f à $]-\infty;1]$

Vocabulaire

l'application

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2 + x - 1$$

restreint à donner les images des x de $[1;+\infty[$; pour cela l'application h est appelé restriction de f sur $[1;+\infty[$.

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $A \subset E$.
On appelle restriction de f à la partie A l'application g définie par :

$$g : A \longrightarrow F$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

On a alors :

$$A \subset E \quad \textbf{et} \quad (\forall x \in A) : g(x) = f(x)$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

1 Soit l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow 2x + |x-2|$$

a La restriction de f à $]-\infty;2]$ est l'application

$$g :]-\infty;2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x+2$$

b La restriction de f à $[2;+\infty[$ est l'application

$$h : [2;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow 3x-2$$

2 On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ ver $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & si \quad x \geq 0 \\ \frac{3x^2}{x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

a La restriction de f à $]-\infty;0[$ est l'application

$$g :]-\infty;0[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{3x^2}{x}$$

b La restriction de f à $[0;+\infty[$ est l'application

$$h : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2+2x-1$$

2 Prolongement d'une application

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $E \subset G$.
On appelle prolongement de f à la partie G, tout application $g : G \longrightarrow F$ tell que :

$$(\forall x \in E) : g(x) = f(x)$$

• Exemple

Soit f et g deux applications définies par

$$f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2|1-x|+x^3$$

Montrer que g est un prolongement de f

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

▷ **Réponse :** On a $[1;+\infty[\subset \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2(1-x)+x^3 \\ &= x^2 - \cancel{x^3} + \cancel{x^3} \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

D'où g est un prolongement de f à $\mathbb{R}$

Remarque

La restriction d'une application à une partie est unique mais en générale plusieurs prolongement possible d'une application à un même ensemble.

Application

On considère les deux applications :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f(x) = |x| - 5x$$

et

$$g : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow g(x) = -4x$$

Est-ce que l'application g est une restriction de f sur $[0;+\infty[$

III Injectivité - Surjectivité - Bijectivité et la Bijection réciproque

1 Application injective

Définition

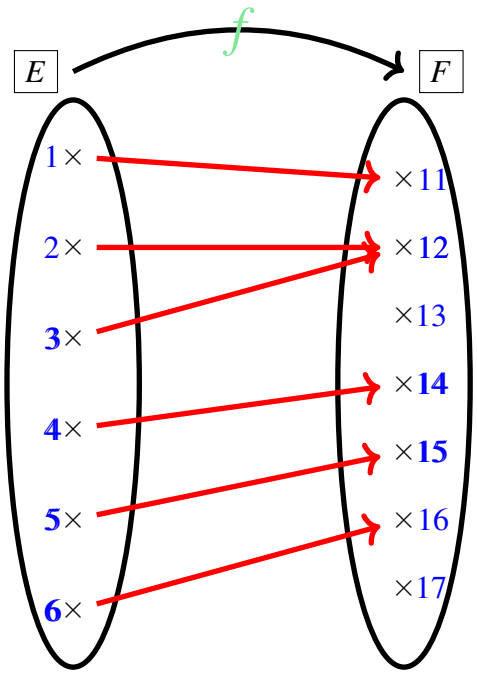
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
f est appelée application injective (ou f est une injection) si et seulement si pour chaque élément y de F a au plus un antécédent x de l'ensemble de départ E.
Ou encore :

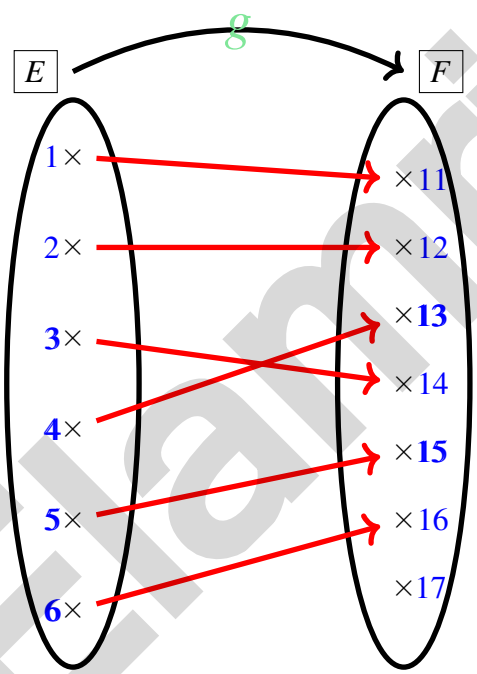
$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow \forall (x_1,x_2) \in E^2 : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple





- ♦ L'application f est-elle injective ?
- ♦ L'application g est-elle injective ?

Remarque

1 Par contraposition :

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in E^2 : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

2 Par la négation :

$$f \text{ n'est pas injective} \Longleftrightarrow \exists (x_1, x_2) \in E^2 : f(x_1) = f(x_2) \quad \text{et} \quad x_1 \neq x_2$$

• Exemple

Soit l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow g(x) = x^2 - 4 \end{aligned}$$

Montrer que g est non injective.

▷**Réponce :**

on a : $g(2) = g(-2) = 0$ mais $2 \neq -2$

D'où g n'est pas injective.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow \sqrt{x}+x \end{aligned}$$

Montrer que f est injective.

▷**Réponce :**

Soit $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\Longrightarrow x_1+\sqrt{x_1}=x_2+\sqrt{x_2} \\ &\Longrightarrow x_1-x_2+\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0 \\ &\Longrightarrow \sqrt{x_1}^2-\sqrt{x_2}^2+\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0 \\ &\Longrightarrow (\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})+\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0 \\ &\Longrightarrow \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1=0 \\ &\Longrightarrow \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0 \quad (\text{car}\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1=0) \\ &\Longrightarrow \sqrt{x_1}=\sqrt{x_2} \\ &\Longrightarrow x_1=x_2 \end{aligned}$$

D'où f est une application injective.

Application

1 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2+5x+2 \end{aligned}$$

a Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=-4$.

b f est-elle injective ?

2 On considère l'application

$$\begin{aligned} g : [1;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2-2x+3 \end{aligned}$$

Monter que g est injective.

3 On considère l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow h((x,y))=(x,0) \end{aligned}$$

Est-ce que l'application h est injective ?

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

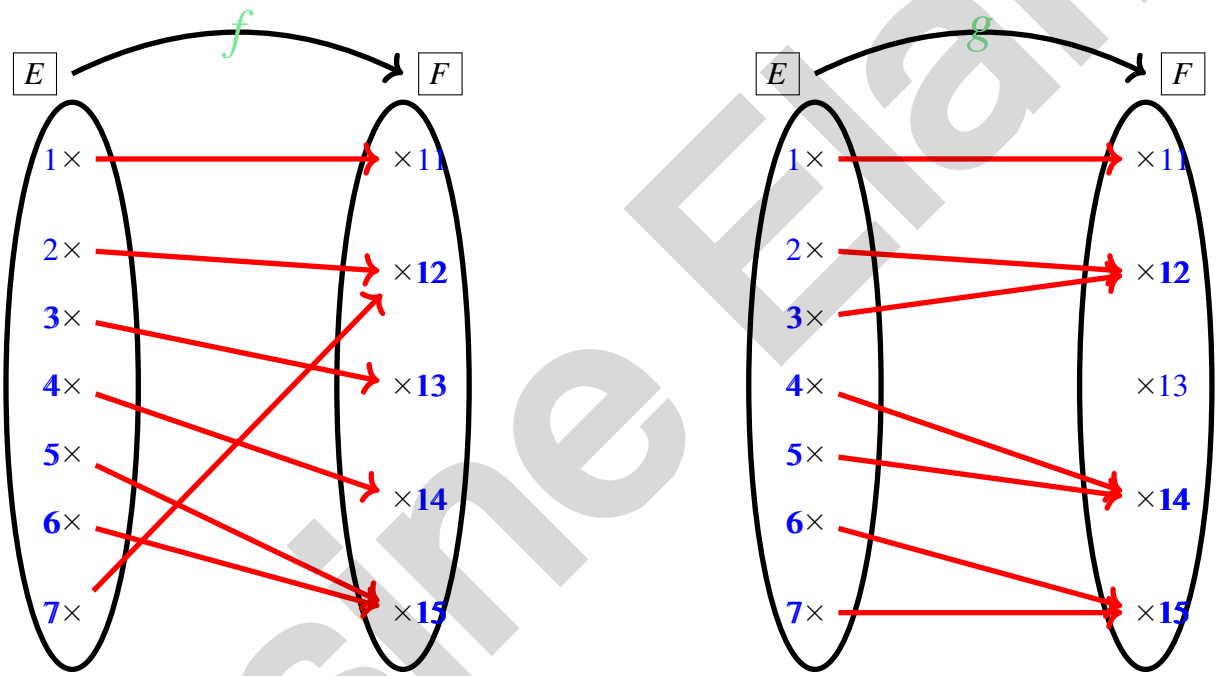
2 Application surjective

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
f est appelée application surjective (ou f est une surjection) si et seulement si pour chaque élément y de F a au moins un antécédent x de l'ensemble de départ E.
Ou encore :

$$f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow (\forall y \in F : \exists x \in E : y = f(x))$$

• Exemple



- ♦ L'application f est-elle surjective ?
- ♦ L'application g est-elle surjective ?

Remarque

Pour démontrer que f est surjective, il suffit de démontrer que l'équation $x \in E$: $f(x) = y$ admet au moins une solution x dans E pour tout y de F. (l'inconnue est x mais y représente les éléments de F) .

• Exemple

On considère l'application

$$f :]1;+\infty[\longrightarrow]2;+\infty[$$
$$x \longrightarrow \frac{2x}{x-1}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Montrer que f est surjective

▷ **Réponce :**

Soit $y \in]1;+\infty[$, résoudre dans l'intervalle $]1;+\infty[$ l'équation : $f(x) = y$

on a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Longleftrightarrow y = \frac{2x}{x-1} \\ &\Longleftrightarrow y(x-1) = 2x \\ &\Longleftrightarrow yx - y = 2x \\ &\Longleftrightarrow yx - 2x = y \\ &\Longleftrightarrow x(y-2) = y \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{y}{y-2} \quad (\text{car } y \neq 2) \end{aligned}$$

il reste à montrer que $x \in]1;+\infty[$. On a : $\begin{aligned} x &= \frac{y}{y-2} \\ &= \frac{y-2+2}{y-2} \\ &= 1 + \frac{y}{y-2} \end{aligned}$

$$\begin{aligned} &\text{puisque } y \in]2;+\infty[, \text{ Alors } y > 2 \\ &\text{alors } y - 2 > 0 \\ &\text{alors } \tfrac{1}{y-2} > 0 \\ &\text{alors } \tfrac{2}{y-2} > 0 \\ &\text{alors } 1 + \tfrac{2}{y-2} > 1 \\ &\text{alors } x > 1 \quad (\text{c-à-d } x \in]1;+\infty[) \end{aligned}$$

d'où l'équation $y = f(x)$ admet une solution dans l'intervalle $x \in]1;+\infty[$. Alors f est surjective.

• Exemple

On considère l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 + 3 \end{aligned}$$

1. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : h(x) > 3$
2. On déduire que h n'est pas surjective.

▷**Réponce :**

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, Alors :

$$f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow f(E) = F$$

EXEMPLES

$f(E) = F$ signifie que $(\forall y \in F)\,(\exists x \in E) : y = f(x)$
c'est la définition d'une application surjective

Application

1 Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

Montrons que f est surjective

2 On considère l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow g((x,y)) = (x,0) \end{aligned}$$

Est ce que g est surjective ?

3 L'application

$$\begin{aligned} f :]0;+\infty[&\longrightarrow]0;+\infty \\ x &\longrightarrow x + \frac{4}{x} \end{aligned}$$

Est ce que g est surjective ?

3 Application bijective-Application réciproque

Définition

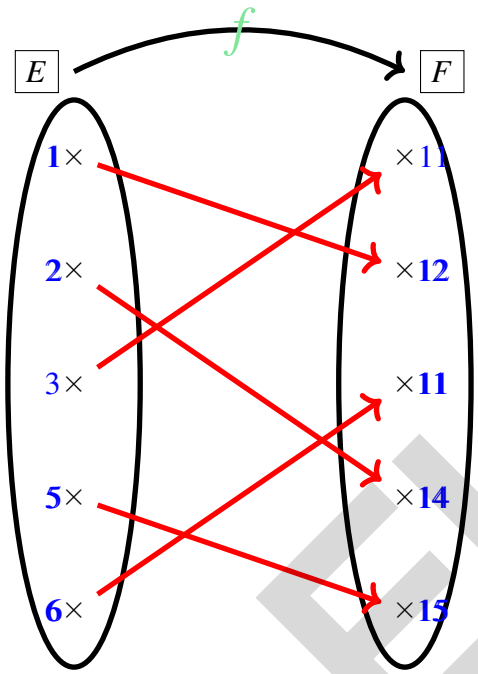
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
f est appelée application bijective (ou f est une bijection) si et seulement si pour chaque élément y de F admet un unique antécédent x de l'ensemble de départ E.
Autrement dit :

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow (\forall y \in F : \exists! x \in E : y = f(x))$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exemple



L'application f est-elle bijective ?

Remarque

Pour démontrer que f est bijective, il suffit de démontrer que l'équation $x \in E : f(x) = y$ admet une unique solution x dans E pour tout y de F. (l'inconnue est x mais y représente les éléments de F) .

Exemple

On considère l'application

$$f :]1;+\infty[\longrightarrow]0;+\infty[$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{x-1}$$

Monter que f est bijective.

▷**Réponce :**

Soit $y \in]0;+\infty[$ résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $]1;+\infty[$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Longleftrightarrow \frac{1}{x-1} = y \\ &\Longleftrightarrow x - 1 = \frac{1}{y} \\ &\Longleftrightarrow x = 1 + \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Puisque $y \in]0;+\infty[$ donc $y > 0$, alors $\frac{1}{y} > 0$. D'où $1 + \frac{1}{y} > 1$
Alors $x > 1$ par suite $x \in]1;+\infty[$
D'où l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $]1;+\infty[$.
D'où f est une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow f \text{ est injective et surjective}$$

EXEMPLES

Dire que f est injective et surjective signifie que tout élément de F admet au plus et au moins un antécédent (en même temps) dans E ; se qui signifie que tout élément de F admet exactement un antécédent dans E.

Dans la pratique pour démontrer qu'une application est bijective , le plus élémentaire est de prouver qu'elle est injective et surjective à la fois. Sinon on peut montrer que :

$$(\forall y \in F) : (\exists! x \in E) : y = f(x)$$

Application

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ das $]-1;1[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est surjective.
3. En déduire que ff est bijective

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Définition

Si f est une bijection de E dans F ; l'application de F dans E qui lie chaque élément y par l'élément x de E qui est solution unique de l'équation $f(x)=y$ s'appelle la bijection réciproque de la bijection f et se note f^{-1}.

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in E \end{cases} \iff \begin{cases} x=f^{-1}(y) \\ y\in F \end{cases}$$

• Exemple

Soit f une application définie par :

$$\begin{aligned} f:]1;+\infty[&\longrightarrow]0;+\infty[\\ x &\longrightarrow \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

d'après l'exemple président, on montre que f est une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$, alors son application réciproque est donnée par :

$$\begin{aligned} f^{-1}:]0;+\infty[&\longrightarrow]1;+\infty[\\ x &\longrightarrow 1+\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Application

On considère l'application

$$\begin{aligned} f:]1;+\infty[&\longrightarrow]2;+\infty[\\ x &\longrightarrow x^2-2x+3 \end{aligned}$$

1. Montrer que f est bijective
2. Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Remarque

Attention à ne pas confondre image réciproque d'une partie par l'application f (celle-ci existe toujours) et application réciproque f^{-1} (qui n'existe que si f est bijective).

• Exemple

Considérons l'application

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x)=x^2 \end{aligned}$$

f n'admet pas d'application réciproque sur $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}$ a une image réciproque par f (il s'agit de

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

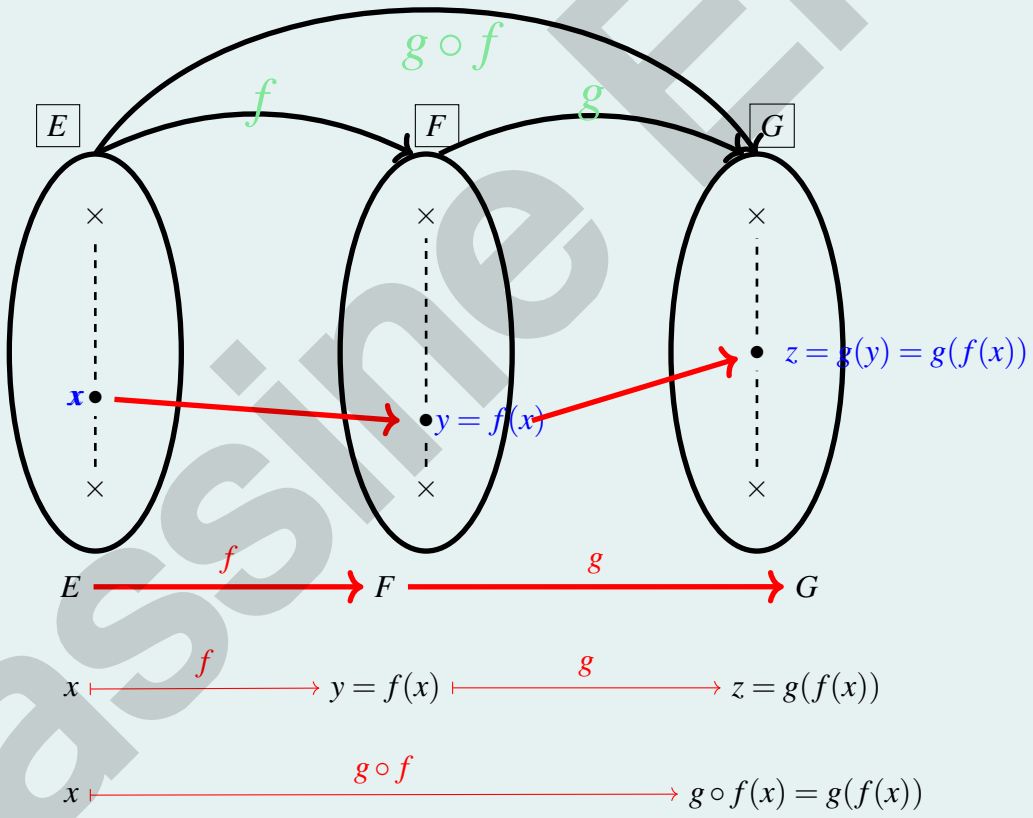
$\mathbb{R}$).

IV composions des application

Définition

On considère les deux applications : $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. L'application $h : E \longrightarrow G$ définies par : $(\forall x \in E) : h(x) = g(f(x))$ est appelée la composée de f et g dans cet ordre , et on note par : $g \circ f$ on a alors :

$$h = g \circ f : E \longrightarrow G$$
$$x \longrightarrow h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$



• Exemple

On considère les deux applications

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow x^2+3$$

et

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow x-1$$

▷**Réponce :**

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2+3) = x^2+3-1 = x^2+2$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2+3 = x^2-2x+1+3 = x^2-2x+4$$

Remarque

1. La composé de deux application n'est pas toujours commutative : $f \circ g \neq g \circ f$
2. La composé des applications est associative : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, on peut écrire $f \circ g \circ h$

Application

On considère les applications

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \longrightarrow x^2+1$$

et

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \sqrt{x}+2$$

Déterminer $f \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ f$

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $f : F \longrightarrow G$ deux applications :

1. Si f et g sont injectives, alors l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective
3. Si f et g sont bijectives, alors l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective, et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

4. Si l'application f est bijective alors :
   a. $(\forall x \in E) : f^{-1} \circ f(x) = x$
   b. $(\forall x \in F) : f \circ f^{-1}(x) = x$

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

EXEMPLES

1 Supposons que f et g sont injectives. on a pour tout x_1 et x_2 de E, on a :

$$\begin{aligned} g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2) &\Longrightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2)) \\ &\Longrightarrow f(x_1)=f(x_2) \quad (\text{car } g \text{ est injective}) \\ &\Longrightarrow x_1=x_2 \quad (\text{car } f \text{ est injective}) \end{aligned}$$

D'où l'application $g\circ f$ est une injection de E dans G

2 Supposons que f et g sont surjectives, alors :

$$f(E)=F \quad \text{et} \quad g(F)=G$$

on a donc :

$$\begin{aligned} g\circ f(E) &= g(f(E)) \\ &= g(F) \quad (\text{car } f \text{ est surjective}) \\ &= G \quad (\text{car } g \text{ est surjective}) \end{aligned}$$

D'où l'application $g\circ f$ est une surjection de E dans G.

Remarque

Soit f une application bijective de E dans F et f^{-1} son application réciproque, alors :

$$f^{-1}\circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f\circ f^{-1} = Id_F$$

où Id_E est l'application identique de E et Id_F est l'application identique de F définies par :

$$Id_E : E \longrightarrow E, \quad x \longrightarrow x$$

et

$$Id_F : F \longrightarrow F, \quad x \longrightarrow x$$

Application

1 On considère les deux applications :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow 4x^3 - 2x$$

et

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \frac{2x}{x^2+1}$$

Déterminer $f\circ g$ et $g\circ f$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 On considère l'application suivante :

$$h : [0;2] \longrightarrow [0;2]$$
$$x \longrightarrow h(x) = (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2$$

a Monter que h est une application bijective

b Calculer $f \circ f(x)$ puis on déduit l'application réciproque f^{-1} de l'application f

Exercice

Considérons l'application :

$$h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [\frac{1}{4};+\infty[$$
$$x \longrightarrow x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$$

1 Écrire l'application h comme la composée de deux application f et g telle que $h = g \circ f$

2 a Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

b Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

c En déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[\frac{1}{4};+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque h^{-1}

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today