Généralités sur les fonctions

I Fonction majorée-Fonction minorée-Fonction bornée

Activité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

1. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)<1$
2. L'équation $f(x)=1$ admet-elle une solution dans $\mathbb{R}$?
3. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)\geq 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$
5. En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ 0\leq f(x)<1$

Définition 1.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de D_f .

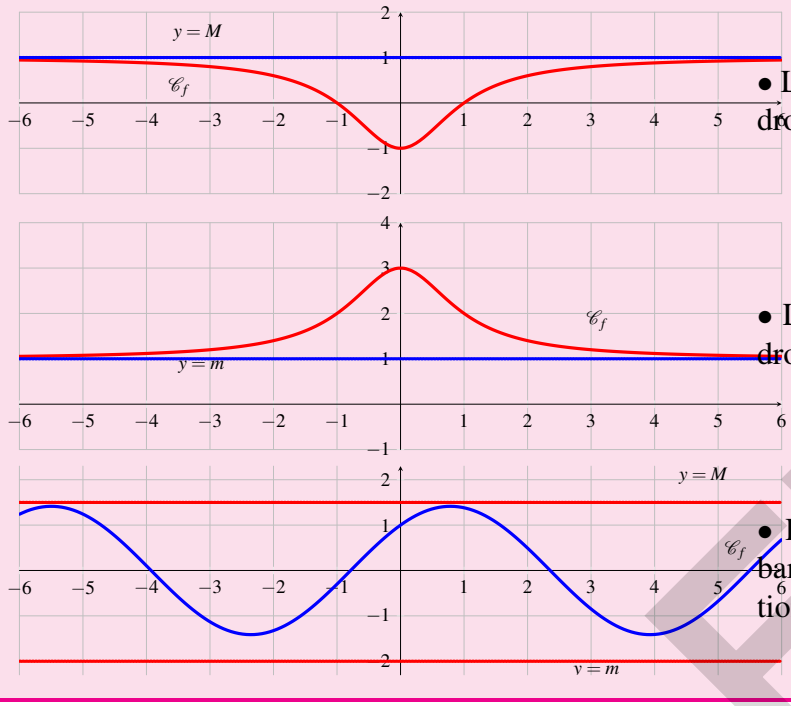
- On dit que f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que : $(\forall x\in I), f(x)\leq M$.Le réel M s'appelle un **majorant** de f sur I.
- On dit que f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que : $(\forall x\in I), f(x)\geq m$.Le réel m s'appelle un **minorant** de f sur I.
- On dit que f est bornée sur I s'il existe deux réels M et m tel que : $(\forall x\in I), m\leq f(x)\leq M$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de D_f.
La fonction f est bornée sur l'intervalle I si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :$(\forall x\in I), |f(x)|\leq M$

Yassine Elamri

EXEMPLE



• La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la droite d'équation $y := M$.

• La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite d'équation $y := m$.

• La courbe $\mathscr{C}_f$ est inclus dans la barre définie par les droites d'équations $y = m$ et $y = M$

Application

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$

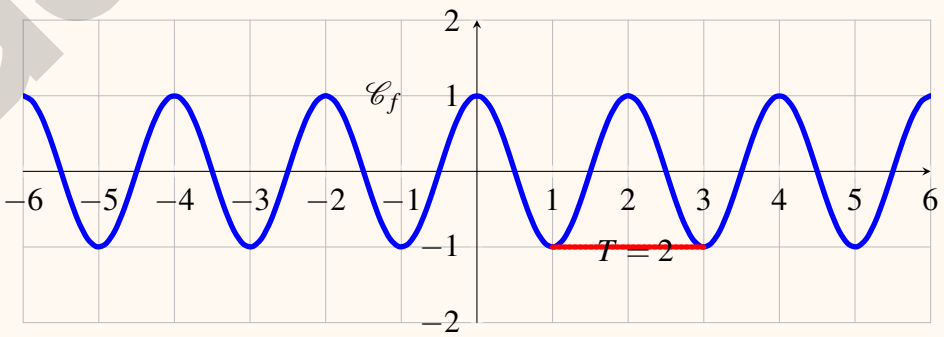
1 Montrer que f est majorée par $\frac{3}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que g est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

II Fonction périodique

Activité

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe représentative ci-dessous :



a Vérifier que : $f(1) = f(3)$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(1) = f(3)$;

b Quelle est la relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ où $x \in \mathbb{R}$?

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 La fonction représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(\pi x)$.

a Confirmer les résultats de la question **1-a)**.

b Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R});\ (x-2) \in \mathbb{R}$ et $(x+2) \in \mathbb{R}$ et $f(x-2) = f(x+2) = f(x)$.**On dit dans ce cas que la fonction f est périodique de période $T = 2$**

Définition 1.2 Une fonction f est dite périodique de période T si et seulement si , pour tout réel $x \in D_f$, on a : $(x+T) \in D_f \wedge f(x+T) = f(x)$

Remarque

Si f est définie sur D_f et périodique de période T alors il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [0;T]$ ou $D_f \cap \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$.

EXEMPLE

- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$;
- La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$;
- La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est périodique de période $T = \pi$.

Application

Soit f une fonction périodique de période $T = 3$ et définie sur $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = x^2 - x$.

1 Calculer $f(2020)$ et $f(1441)$.

2 Déterminer l'expression $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Application

1 Soit a un réel strictement positif. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(ax)$ sont périodiques et de période $T = \frac{2\pi}{a}$.

2 Déterminer la période de chacune des fonctions suivantes : $f : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ et $g : x \mapsto \sin(2x)$

III Extremums d'une fonction

Définition 1.3 Soient f une fonction définie sur un intervalle I de D_f et $x_0 \in I$.

- $f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \geq f(x_0)$ et on écrit : $f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$
- $f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \leq f(x_0)$ et on écrit :

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$.

- Le maximum et le minimum sont appelés les **extremums** de la fonction f.

Application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

1. Montrer que $\frac{1}{2}$ est une valeur maximale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $-\frac{1}{2}$ est une valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

IV Monotonie d'une fonction

Définition 1.4 Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
- ▷ f est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
- ▷ f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
- ▷ f est strictement croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
- ▷ f est strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
- ▷ f est monotone sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.
- ▷ f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou décroissante sur I.

1 Taux de variations :

Définition 1.5 Soit une fonction f définie sur un intervalle I et soient a et b deux nombres distincts de l'intervalle I.
Le nombre $T(a;b) = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ s'appelle le taux de variation de la fonction f entre a et b .

Propriété

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) \geq 0$
- f est strictement croissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) > 0$
- f est décroissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) \leq 0$
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) < 0$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à 0 et soient $I \subset D_f \cap \mathbb{R}^+$ et I' son symétrique par rapport à 0.

- Soit f paire, on a : si f est croissante sur I alors f est décroissante sur I' et si f est décroissante sur I alors f est croissante sur I'
- Soit f impaire, on a : si f est croissante sur I alors f est croissante sur I' et si f est décroissante sur I alors f est décroissante sur I'

Proposition

(Sens de variation de la fonction $f+\lambda$)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et λ un réel. Si f est monotone sur I alors f et $f+\lambda$ ont même sens de variation sur I.

Proposition

(Sens de variation de la fonction λf)Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et λ un réel.

- Si $\lambda > 0$ alors les fonctions f et λf ont même sens de variation sur I.
- Si $\lambda < 0$ alors les fonctions f et λf ont des sens de variation contraires sur I.

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Montrer que la fonction f est minorée par le nombre 2.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $]1;+\infty[$ et décroissante sur $[0;1]$.
4. En déduire les variation de la fonction f sur les intervalles $]-\infty;-1]$ et $]-1;0]$.

V Composition de deux fonctions

Activité

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$.

1. Déterminer D_f et D_g puis donner le tableau de variations de f et celui de g.
2. Calculer $h(x) = g(f(x))$
3. Déterminer D_h puis donner le tableau de variations de h.
4. Comparer les monotonies des fonction f, g et h.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Définition 1.6 Soit f une fonction définie sur D_f et g une fonction définie sur D_g. On pose :

L'équation de cette courbe représentative est : $y = f(x)$.
La courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une parabole et celle de la fonction

https://steinmath.com
https://steinmath.com
ay better than yesterday, tomorrow better than today

inverse une hyperbole.

1 Étude de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$

Activité

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

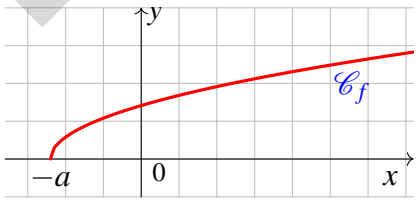
1. Déterminer D_f.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $a = 0$ et pour $a = 2$.
   (On remarque que la courbe $\mathscr{C}_2$ est une image de $\mathscr{C}_0$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$)

Propriété

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+a}$.

- L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = [-a;+\infty[$.
- La fonction f est croissante sur D_f.
- Tableau de variations et représentation graphique :

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$		↗



2 Étude de la fonction $x \longmapsto ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$

Activité

Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier la parité de f.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $a = 1$.

Propriété

Soit f la fonction par $f(x) = ax^3$ tel que $a \neq 0$.

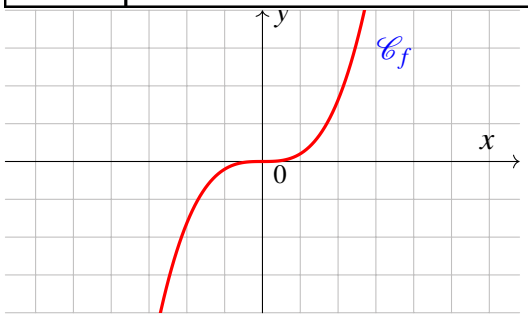
- L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R}$.
- La fonction f est impaire.
- Tableau de variations et représentation graphique :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

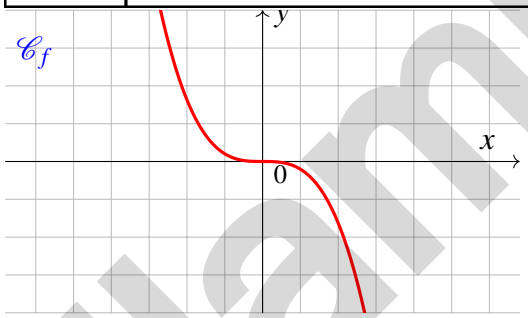
Si $a > 0$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	



Si $a < 0$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

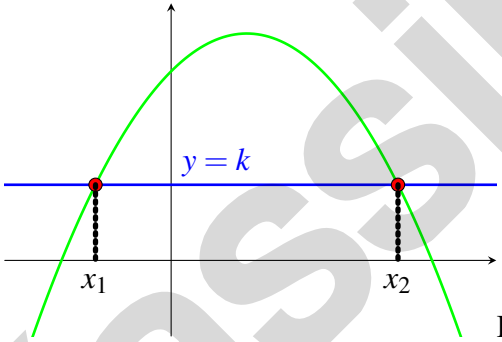


VII Comparaison de deux fonctions

1 Résolution d'une équation

a Résolution d'équation $f(x) = k$

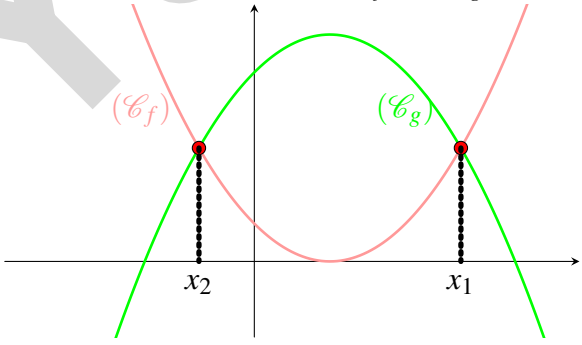
On trace la droite d'équation $y = k$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec la courbe.



Donc l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{x_1; x_2\}$

b Résolution d'équation $f(x) = g(x)$

On trace les deux courbes (C_f) et (C_g) et on lit les abscisses des points d'intersection.



Donc l'ensemble des solutions de cette équation est :

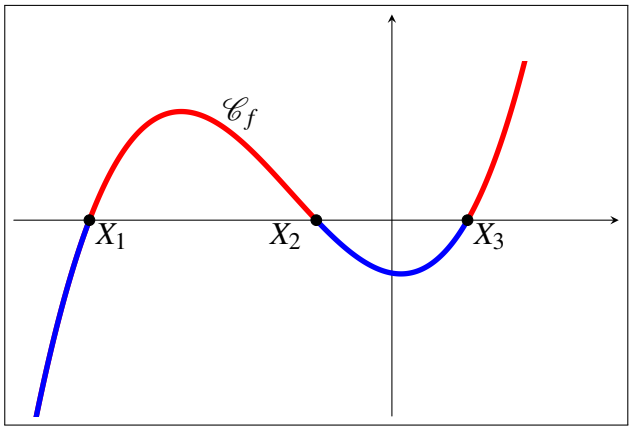
Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$S = \{x_1; x_2\}$

2 Résolution d'une inéquation

a Résolution d'inéquation $f(x) > 0$



Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S =]X_1; X_2[\cup]X_3; +\infty[$

b Résolution d'inéquation $f(x) \leq g(x)$

Activité

Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ et $g(x) = x$.

1. Déterminer D_f et D_g.
2. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
3. Comparer f et g.

Définition 1.8 Soient f et g deux fonctions. On dit que f et g sont égales et on note $f = g$ si : $D_f = D_g = D$ et $(\forall x \in D) \quad f(x) = g(x)$

EXEMPLE

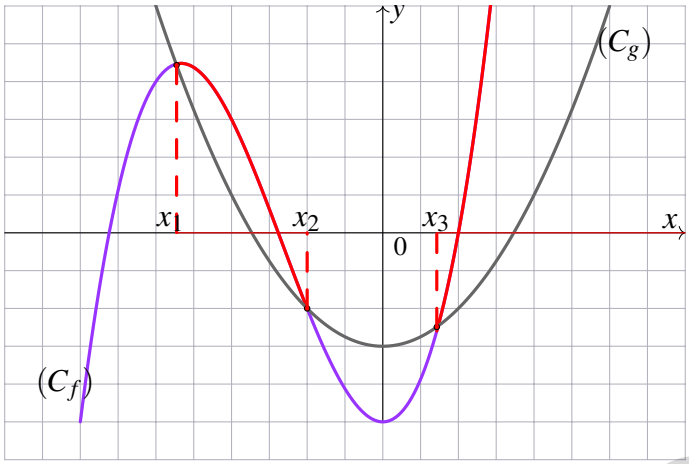
Les fonctions u et v sont-elles égales ?

1. u et v sont définies par $u(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$
2. u et v sont définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{x}$

Définition 1.9 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I tel que $I \subset D_f \cap D_g$. On dit que f est supérieure ou égale à g sur I si et seulement si : $(\forall x \in I) \quad f(x) \geq g(x)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



On a : $\forall x \in [x_1;x_2] \cup [x_3;+\infty[;\ f(x) \geq g(x)$
Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est : $[x_1;x_2] \cup [x_3;+\infty[$
l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est : $]x_1;x_2[\cup]x_3;+\infty[$

Remarque

L'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est un cas particulier d'inéquation $f(x) \leq g(x)$ avec g la fonction constante $g(x) = k$

Application

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Donner le tableau de variations de f et celui de g.
2. Calculer $f(3)$ et $g(3)$.
3. Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le même repère.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq f(x)$.
5. Montrer que : $\forall x \in]3;+\infty[; g(x) < f(x) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$
6. En déduire les solutions de l'inéquation : $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$ dans l'intervalle $]1;+\infty[$
7. Résoudre, algébriquement, dans $]1;+\infty[$ l'inéquation : $P(x) > 0$ où $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$.
   (On donne $P(3) = 0$)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today