Limites des suites numériques

Exercice

En utilisant les définitions de la limite montrer que :

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ 2 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ 3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ 4 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$

Exercice

Montrer que si une suite numérique converge vers un réel l strictement positif
Alors tous les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}$: Montrer que
- Si $a = 1$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$
- Si $a > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. (poser $q = a+1$ avec $a > 0$)
- Si $-1 < a < 1$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$
- Si $a \leq -1$ Alors (a^n) nadmet aucune limite.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{21+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Montrer que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2 Montrer que $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

3 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est convergente

4 a Montrer par récurrence que $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Yassine Elamri

Exercice

Soit (u_n)la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2} \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_n > 2$.
2. Étudier la monotonie de (u_n) puis déduire qu'elle est convergente .
3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$
   a. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   b. Exprimer V_n puis u_n en fonction de n.
   c. Calculer $\lim V_n$ et $\lim u_n$.
4. a. Calculer $\sum_{k=0}^{n} V_k$.
   b. Vérifier que $\dfrac{3}{u_n + 1} = 1 - V_n$.
   c. i. On pose $S_n = \dfrac{3}{u_n + 1}$ et déduire que $\sum_{k=0}^{n} S_k = n + 1 + \dfrac{1}{3}\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right)$.
      ii. Calculer $\lim \sum_{k=0}^{n} S_k$

Exercice

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

1. $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = \dfrac{2 + u_n}{u_n}$
2. $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + u_n}{2}}$

Exercice

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :$u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 2}{u_n + 8}$

1. Déterminer les valeurs de u_0 pour que (u_n) soit une suite constante .
2. supposons que $u_0 = 0$
   a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Démontrer par récurrence que $0 \leq u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

c Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante .

d Déduire que (u_n) est convergente.

e Démontrer que :$\forall n \in \mathbb{N} : 1-u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1-u_n)$.

f Déduire que :$\forall n \in \mathbb{N} : 1-u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ puis déterminer $\lim u_n$.

3 Soit (V_n) la suite définie par :$V_n = \frac{u_n+2}{u_n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a Démontrer que la suite (V_n) est géométrique à déterminer sa raison et son premier terme.

b Exprimer V_n en fonction de n puis déterminer $\lim V_n$.

c Démontrer que $u_n = \frac{2-2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ puis déduire $\lim u_n$.

d Calculer les deux sommes $S_n = V_0+V_1+\ldots+V_n$ et $P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n$.

e calculer $\lim S_n$ et $\lim P_n$.

Exercice

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \qquad$ et $\qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$

Montrez que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today