Équations, inéquations et systèmes

I Équations et inéquations du seconde degré à une inconnue

1 Équations du seconde degré à une inconnue

Définition

Toute équation s'écrit sous la forme $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $a\neq 0$ s'appelle équation du seconde degré à une inconnue.

Remarque

1. Tout nombre t tel que $at^2+bt+c=0$ appelé solution ou racine de cette équation.
2. Le nombre $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$.
3. L'écriture $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Propriété

Soient a, b et c des nombres réels tels que $a\neq 0$. L'ensemble de solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ dans $\mathbb{R}$:

1. Si $\Delta<0$ alors $S=\varnothing$.
2. Si $\Delta=0$ alors $S=\{-\frac{b}{2a}\}$.
3. Si $\Delta>0$ alors $S=\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\}$.

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2+3x-5=0$
2. $x^2+x+\frac{1}{4}=0$
3. $x^2-3x+4=0$

Yassine Elamri

a Somme et produit des racines

Propriété

Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$, alors :

1. $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$
2. $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

Propriété

Soient s et p deux nombres réels.

1. Le système $(S):\begin{cases}x+y=s\\xy=p\end{cases}$ admet une solution si et seulement si $s^2-4p\geq 0$.
2. Les réels x et y sont solutions de l'équation $X^2-sX+p=0$.
3. L'ensemble de solution du système (S) est $S=\{(x;y);(y;x)\}$.
4. Un tel système est appelé un système symétrique.

Application

1. Sachant que 1 est une solution de $2018x^2-x-2017=0$, trouver la deuxième solution.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases}x+y=13\\xy=12\end{cases}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Signe d'un trinôme du seconde degré

Propriété

Soit ax^2+bx+c un trinôme de seconde degré tel que a, b et c des réels et $a \neq 0$ et soit Δ son discriminant. On a les cas suivants :

1 Si $\Delta < 0$ alors le tableau de signe de ax^2+bx+c :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

2 Si $\Delta = 0$ alors le tableau de signe de ax^2+bx+c :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de a

3 Si $\Delta > 0$ alors le tableau de signe de ax^2+bx+c (On suppose que $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a

Remarque

Pour résoudre une inéquations du seconde degré à une inconnue on se base sur l'étude de signe d'un trinôme.

• Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2+2x-12 \geq 0$ revient à étudier le signe du trinôme $2x^2+2x-12$ et on a : $\Delta = b^2-4ac = 100$ et donc $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$, par suite le tableau de singe de $2x^2+2x-12$ est :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$2x^2+2x-12$	$+$	0	$-$ 0	$+$

Donc, d'après le tableau l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S =]-\infty,-3] \cup [2,+\infty[$.

3 Équations et inéquations du premier degré à deux inconnues

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (x,y) tels que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Définition

Tout équations de la forme (E) : $ax+by+c=0$ où a, b et c des nombres réels tels que $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ appelée équation du premier degré à deux inconnues x et y.
Un coupe (x_0,y_0) est une solution de l'équation (E) si et seulement si $ax_0+by_0+c=0$.

Remarque

Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $ax+by+c=0$. On calcule x en fonction de y ou bien y en fonction de x.

• Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $2x-y-3=0$.
En calculant y en fonction de x on obtient $y=-2x+3$. D'où l'ensemble de solutions est $S=\{(x,-2x+3):x\in\mathbb{R}\}$.

Propriété

Une droite (D) d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ détermine deux demi-plan ouverts :

1. L'un est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $ax+by+c>0$
2. L'autre est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $ax+by+c<0$

Application

1. Résoudre graphiquement les inéquations :
   a. $x+2y-2<0$
   b. $2x+y+2\geq 0$
2. En déduire les solutions du système : (S) : $\begin{cases}x+2y-2<0\\2x+y+2\geq 0\end{cases}$

II Les systèmes

1 Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnue

On considère le système (S) : $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ tel que a, b, c, a', b' et c' des réels.

Le nombre $ab'-a'b$ appelé le déterminant du système (S) noté $D=\begin{vmatrix}a&b\\a'&b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$

Et on pose $D_x=\begin{vmatrix}c&b\\c'&b'\end{vmatrix}=cb'-c'b$ et $D_y=\begin{vmatrix}a&c\\a'&c'\end{vmatrix}=ac'-a'c$.

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

[Méthode du déterminant]

1. Si $D = 0$ alors deux cas se présents :
   - a. Si $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$ alors le systèmes n'admet pas de solutions.
   - b. Si $D = D_x = D_y = 0$ alors le système admet une infinité de solutions.
2. Si $D \neq 0$ alors le système (S) (appelé système de Cramer) admet une solution unique dans $\mathbb{R}^2$ donnée par :

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} \quad et \quad y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$$

Et on écrit $S = \{(x_0, y_0)\}$.

• Exemple

Résoudre par la méthode du déterminant dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

2 Systèmes de n équations du premier degré à n inconnues ($2 \leq n \leq 4$)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

On considère les système (S) : $\begin{cases} x+y+z=21 \\ 2x+y=20 \\ x+2z=3 \end{cases}$.

On a :

$$\begin{cases} x+y+z=21 \\ 2x+y=20 \\ x+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=21 \\ 2x+y=20 \\ x=3-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=21 \\ 2(3-2z)+y=20 \\ x=3-2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=21 \\ y=14+4z \\ x=3-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=21 \\ y=14+4z \\ x=3-2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-2z)+(14+4z)+z=21 \\ y=14+4z \\ x=3-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{5}{3} \\ y=14+4z \\ x=3-2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{62}{3} \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

D'où $S=\{(\frac{5}{3};\frac{62}{3};\frac{-1}{3})\}$. Ce procédure est appelé la méthode d'élimination de Gauss.

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système suivante : $(S)=\begin{cases} x-y+2z+3t=0 \\ y-2z-t=0 \\ -2z+4t=0 \\ y-t=0 \end{cases}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today