Développement et factorisation

I Rappel vocabulaire

1 Expression algébrique

Définition

On appelle expression algébrique, toute expression qui contient à la fois des chiffres et des lettres

EXEMPLES

- $A = 2x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \sqrt{3}x + 1$
- $B = \left(2x^2 + 3\right)\left(-4x - 1\right)$

2 Expression numérique

Définition

On appelle expression numérique, toute expression ne contenant que des chiffres

EXEMPLES

- $C = 2\sqrt{7} + \frac{1}{2} - 11.5 + 17$
- $D = \left(2\sqrt{3} - \frac{11}{3}\right)\left(11 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} + 1\right)$

3 Somme algébrique

Définition

On appelle somme algébrique, toute expression algébrique ne contenant aucune parenthèse et écrite sous la forme d'une suite d'addition et de soustraction de nombres

EXEMPLES

- $E = 3x^2 + x\sqrt{3} - 11$
- $F = \sqrt{2}x^5 - 4x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + \sqrt{7}$

Yassine Elamri

https://steinmath.com

4 Réduire (Simplifier) une expression algébrique

Définition

Réduire une expression algébrique, c'est la simplifier en regroupant les termes qui se ressemblent du plus petit au plus grand

EXEMPLES

$$G = 3x^2-2x+4-5x^2+1+7x+x^3 = x^3+3x^2-5x^2-2x+7x+4+1 = x^3-2x^2+5x+5$$

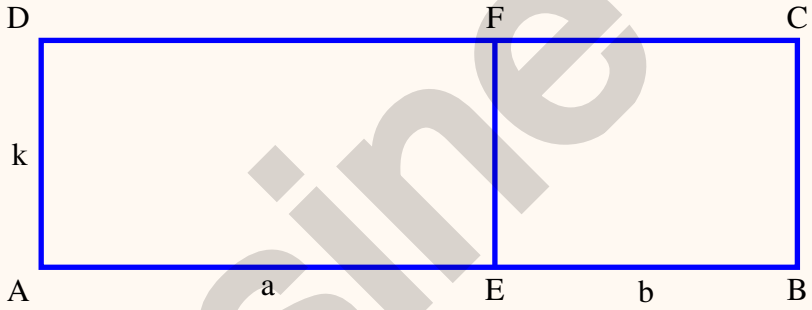
$$H = 3x-2x^3+2x+x^3-11-5x+7 = -2x^3+x^3+3x+2x-5x-11+7 = -x^3-4$$

II Développement et factorisation

1 Activité

Activité

Soient $ABCD$ et $AEFD$ deux rectangles tel que : $AB = k$, $AE = a$ et $BE = b$



1. Calculer l'aire de chacun des rectangles $AEFD$ et $EBCF$ et $ABCD$
2. Déduire que : $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$

Solution

1. ★ L'aire du rectangle $AEFD$ est : $S_1 = AE \times AD = k \times a$
   ★ L'aire du rectangle $EBCF$ est : $S_2 = EF \times EB = k \times b$
   ★ L'aire du rectangle $ABCD$ est : $S_3 = AB \times AD = k \times (a+b)$

2. L'aire du triangle $ABCD$ est la somme des aires des triangles $AEFD$ et $EBCF$
   Donc : $S_3 = S_1 + S_2$
   Alors : $S_3 = k \times a + k \times b$
   D'ou : $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Développement

a Définition

Définition

Le développement est l'écriture d'un produit sous forme d'une somme ou différence

b Règle

Règle

k, a et b sont des nombres réels

★ $k\times(a+b)=k\times a+k\times b$ | ★ $k\times(a-b)=k\times a-k\times b$

Exemples

➠ $\begin{aligned}A &= 2x(x+4)\\ &= 2x\times x+2x\times 4\\ &= 2x^2+8x\end{aligned}$

➠ $\begin{aligned}B &= (-3x-5)\times(-4x)\\ &= -3x\times(-4x)-3x\times(-4x)\\ &= 12x^2+20x\end{aligned}$

➠ $\begin{aligned}C &= 3x\left(2x^2-x+2\right)-5\times\left(3x^2+4x-5\right)\\ &= 6x^3-3x^2+6x-15x^2-20x+25\\ &= 6x^3-3x^2-15x^2+6x-20x+25\\ &= 6x^3-18x^2-14x+25\end{aligned}$

c Règle

Règle

a, b, c et d sont des nombres réels

$\begin{aligned}(a+b)\times(c+d) &= a\times(c+d)+b\times(c+d)\\ &= ac+ad+bc+bd\end{aligned}$

Exemples

➠ $\begin{aligned}A &= \left(3\sqrt{2}-1\right)\times\left(2+\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}\times\left(2+\sqrt{2}\right)-1\times\left(2+\sqrt{2}\right)\\ &= 3\sqrt{2}\times 2+3\sqrt{2}\times\sqrt{2}-2-\sqrt{2} = 6\sqrt{2}+3\times 2-2-\sqrt{2}\\ &= 6\sqrt{2}+6-2-\sqrt{2} = 6\sqrt{2}-\sqrt{2}+6-2 = 5\sqrt{2}+4\end{aligned}$

➠ $\begin{aligned}B &= (2-x)\times(3x+1) = 2\times(3x+1)-x\times(3x+1)\\ &= 2\times 3x+2\times 1-x\times 3x-x\times 1 = 6x+2-3x^2-x\\ &= -3x^2+6x-x+2 = -3x^2+5x+2\end{aligned}$

➠ $\begin{aligned}C &= 3x\times(2x+1)+(3x-2)\times(x+7) = 3x\times(2x+1)+3x\times(x+7)-2\times(x+7)\\ &= 3x\times 2x+3x\times 1+3x\times x+3x\times 7-2\times x-2\times 7 = 6x^2+3x+3x^2+21x-2x-14\\ &= 6x^2+3x^2+3x+21x-2x-14 = 9x^2+22x-14\end{aligned}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Factorisation

a Définition

Définition

La factorisation est l'écriture d'une somme ou différence sous forme d'un produit

Règle

k, a et b sont des nombres réels

★ $k \times a + k \times b = k \times (a+b)$ | ★ $k \times a - k \times b = k \times (a-b)$

Remarque

Pour factoriser une expression algébrique, on cherche un facteur commun, après on simplifie l'intérieur des parenthèses

EXEMPLES

↘ Cas 1 : facteur commun sans parenthèse

➠ $A = 2\sqrt{3}x - \sqrt{6}x^2$
$= 2\sqrt{3}x - \sqrt{2}x \times \sqrt{3}x$
$= \sqrt{3}x\left(2 - \sqrt{3}x\right)$

➠ $B = 3x^2 - 9x$
$= 3x \times x - 3x \times 3$
$= 3x \times (x-3)$

↘ Cas 2 : facteur commun avec parenthèse

➠ $C = (2x+1)(5-x) - (2x+1)(7x+3)$
$= (2x+1)[(5-x) - (7x+3)]$
$= (2x+1)(5-x-7x-3)$
$= (2x+1)(2-8x)$

➠ $D = (x+3)^2 + 2x(x+3) - (x+3)$
$= (x+3)(x+3) + 2x(x+3) - (x+3)$
$= (x+3)(x+3+2x-1)$
$= (x+3)(3x+2)$

↘ Cas 3 : factorisation double

➠ $E = 7(x-1) + 2x^2 - 2x$
$= 7(x-1) + 2x(x-1)$
$= (x-1)(7+2x)$

➠ $F = -4x^2 + 2x7\left(-2x^3 + x^2\right)$
$= 2x(-2x+1) + x^2(-2x+1)$
$= (1-2x)\left(2x + x^2\right)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Identités remarquables

1 Propriétés

Propriété

a et b sont deux nombres réels

Développement

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Factorisation

2 exemples

EXEMPLES

↘ Identités remarquables et développement

- $A = (x+1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$
- $B = (2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$
- $C = (x-5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$
- $D = (5-7x)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times (7x) + (7x)^2 = 25 - 70x + 49x^2$
- $E = \left(2x - \sqrt{5}\right)\left(2x + \sqrt{5}\right) = (2x)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 4x^2 - 5$
- $F = \left(2\sqrt{7}x - 3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{7}x + 3\sqrt{5}\right) = \left(2\sqrt{7}x\right)^2 - \left(3\sqrt{5}\right)^2 = 28x^2 - 45$

↘ Identités remarquables et factorisation

- $A = x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x+3)^2$
- $B = 25x^2 + 30x + 9 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2 = (5x+3)^2$
- $C = x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 = (x-2)^2$
- $D = 49x^2 - 56x + 16 = (7x)^2 - 2 \times (7x) \times 4 + 4^2 = (7x-4)^2$
- $E = 144x^2 - 49 = (12x)^2 - 7^2 = (12x-7)(12x+7)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

➠ $F = 16x^2 - \frac{1}{4} = (4x)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(4x - \frac{1}{2}\right)\left(4x + \frac{1}{2}\right)$

↘ Identités remarquables et double factorisation

➠ $A = 4x^2 + 4x + 1 - (10x + 5) = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 - 5(2x + 1)$
$= (2x + 1)^2 - 5(2x + 1) = (2x + 1)(2x + 1 - 5) = (2x + 1)(2x - 4)$

➠ $B = \frac{1}{2}(-x^2 - x)(2x - 8) + x^2 - 8x + 16 = \frac{1}{2} \times 2(-x^2 - x)(x - 4) + x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2$
$= (-x^2 - x)(x - 4) + (x - 4)^2 = (x - 4)(-x^2 - x + x - 4)$
$= (x - 4)(-x^2 - 4) = -(x - 4)(x^2 + 4)$

➠ $C = (3x - 1)^2 - (2 - x)^2 = [(3x - 1) - (2 - x)][(3x - 1) + (2 - x)]$
$= (3x - 1 - 2 + x)(3x - 1 + 2 - x) = (4x - 3)(2x + 1)$

3 Exercice d'application

Application

1 Développer et simplifier

$A = (2x + 1)^2 - (3x + 5)(3x - 5)$

$B = (7 - 2x)^2 + 4x(1 - x)$

2 Factoriser ce qui suit

$C = 25x^2 - 4 + (5x - 2)(5x + 7)$

$D = 9x^2 - 6x + 1 + 5x(3x - 1)$

Solution

1 Développons et simplifions

$A = (2x + 1)^2 - (3x + 5)(3x - 5)$
$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 - \left((3x)^2 - 5^2\right)$
$= 4x^2 + 4x + 1 - 9x^2 + 25$
$= 4x^2 - 9x^2 + 4x + 1 + 25$
$= -5x^2 + 4x + 26$

$B = (7 - 2x)^2 + 4x(1 - x)$
$= 7^2 - 2 \times 7 \times 2x + (2x)^2 + 4x \times 1 - 4x \times x$
$= 49 - 28x + 4x^2 + 4x - 4x^2$
$= \cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} - 28x + 4x + 49$
$= -24x + 49$

2 Factorisons

$C = 25x^2 - 4 + (5x - 2)(5x + 7)$
$= (5x)^2 - 2^2 + (5x - 2)(5x + 7)$
$= (5x - 2)(5x + 2)(5x - 2)(5x + 7)$
$= (5x - 2)(5x + 2 + 5x + 7)$
$= (5x - 2)(1x + 9)$

$D = 9x^2 - 6x + 1 + 5x(3x - 1)$
$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 + 5x(3x - 1)$
$= (3x - 1)^2 + 5x(3x - 1)$
$= (3x - 1)(3x - 1 + 5x)$
$= (3x - 1)(8x - 1)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today