Dérivation

Exercice : 1

(C_f) désigne la courbe représentative d'une fonction dans un repère orthonormé.

1) Déterminer D_f
2) Déterminer les limites au bornes de D_f
3) Déterminer $f'(1)$ et $f'(-1)$
4) f est-elle dérivable en 0
5) Dresser le tableau de variation de f

Exercice : 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{3-2x}$

1) Déterminer D_f
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3) Étudier la continuité de f à gauche de $a = \frac{3}{2}$
4) Étudier la dérivabilité de f à gauche de $a = \frac{3}{2}$, et interprétai le résultat géométriquement
5) a) Montrer que : $(\forall x \in D_f \setminus \{\frac{3}{2}\}) : f'(x) = \dfrac{3(1-x)}{\sqrt{3-2x}}$
b) Dresser le tableau de variation de f sur D_f.
6) Montrer que l'équation $x\sqrt{3-2x} = -1$ admet au moins une solution dans $]-1;1[$
7) Soit g la fonction définie sur $I =]-\infty;1]$
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.
b)Étudier la dérivabilité de g^{-1} sur J
c) Calculer $g(0)$ puis déterminer $(g^{-1})'(0)$

Exercice : 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x^3 + x + 1$

1) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$
3) Montrer que $-1 < \alpha < 0$
4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
5) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur $\mathbb{R}$.
6) Calculer $(f^{-1})'(0)$ en fonction de α.

Exercice : 4

En utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{2\sin(x)-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}$ 3) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x\sin(x)}{x-\pi}$ 4) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 5) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

Yassine Elamri

Exercice : 5

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x\sqrt[7]{x^3-4x+1}$;; 2) $f(x) = (x\sqrt{x}+1)^{2016}$;; 3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{x+3}}$;; 4) $f(x) = \sin(x)\cos^3(2x^2+1)$

Exercice : 6

soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2+x;;;si.x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{2}{2-x};;;si.x < 1 \end{cases}$

1) Déterminer D_f.
2) Étudier la continuité de f en $a = 1$.
3) Étudier la dérivabilité de f en $a = 2$.
4) Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $a = 1$.
5) f est-elle dérivable en $a = 1$

Exercice : 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x}+1$

1. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ f(x) = (\sqrt{x}-1)^2$ ..... (0.5pt)
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ..... (0.5pt)
3. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ ..... (0.5pt)
4. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 , puis interpréter le résultat obtenu ..... (1.5pt)
   a. Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ ..... (1.5pt)
   b. Étudier les variations de f sur D_f, puis donner le tableau de variations de f ..... (1pt)
   c. Déterminer une équation cartésienne de la droite tangente de la courbe représentative de f au point d'abscisse 4 ..... (1pt)
5. Soit g la restriction de fonction g sur l'intervalle $[1,+\infty[$
   a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. ..... (1.5pt)
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}
   c. Montrer que la fonction g^{-1}est dérivable en 1, puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'(1)$ ..... (1pt)
   d. Calculer $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt[3]{x}+g^{-1}(x)-\sqrt[3]{4}-1}{x-4}$ ..... (0.75pt)
   e. Calculer $g^{-1}(x)$ $(\forall x \in J)$ ..... (1.5pt)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today