Chapitre

Limites des suites numériques

Les Pré-requis :

1. Calculer les termes dune suite définie par son terme général ou par récurrence.
2. Travailler sur les indices des suites.
3. Étudier la monotonie dune suite.
4. Les suites bornées majorées, et minorées.
5. Calculer le terme général et la somme de termes consécutifs pour les suites arithmétiques et géométriques.

Les Compétences attendues :

1. Connaitre et utiliser la définition de la limite dune suite.
2. Étudier la convergence dune suite.
3. Déterminer la limite dune suite lorsqu'elle existe.
4. Raisonner par récurrence pour établir une propriété dune suite.
5. Étudier des phénomènes dévolution modélisables par des suites.

Yassine Elamri

I GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES : Rappel

1 Suites monotones, majorées, minorées, et bornées :

Définition

Une suite numérique

1. Une suite numérique est une application u définie SOUVENT sur $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
   On note Alors les suites numériques définie sur $\mathbb{N}$ par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n).
2. Parfois on définie des suites à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, càd $u : \{n \in \mathbb{N}/n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$.
   On les note Alors $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Définition

[Suite monotone] Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique ;

1. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante Si et seulement si, $(\forall n \geq n_0)$, $u_{n+1} \geq u_n$.
2. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante Si et seulement si, $(\forall n \geq n_0)$, $u_{n+1} \leq u_n$.
3. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante Si et seulement si, $(\forall n \geq n_0)$, $u_{n+1} = u_n$.
4. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite monotone Si et seulement si elle est croissante ou décroissante.

Remarque

1. Pour la monotonie stricte il faut que les inégalités entre u_{n+1} et u_n soit stricte.
2. $u_{n+1} \geq u_n \iff u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $u_{n+1} \leq u_n \iff u_{n+1} - u_n \leq 0$
3. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante $\iff u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq u_{n_0+2} \leq .....$
4. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante $\iff u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq u_{n_0+2} \geq .....$
5. L'opposée d'une suite croissante est une suite décroissante.
6. Les suites constantes sont croissantes et décroissantes en même temps.

Définition

[Suite majorée, minorée, et bornée] Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique ;

1. On dit que la suite (u_n) est majorée Lorsque : $(\exists M \in \mathbb{R})$ tel que $(\forall n \geq n_0)\ u_n \leq M$
2. On dit que la suite (u_n) est minorée Lorsque : $(\exists m \in \mathbb{R})$ tel que $(\forall n \geq n_0)\ m \leq u_n$
3. On dit que la suite (u_n) est bornée Lorsque : $(\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2)$ tel que $(\forall n \geq n_0)$, $m \leq u_n \leq M$

Remarque

1. (u_n) est bornée $\iff$ (u_n) est majorée et aussi minorée.
2. (u_n) est bornée $\iff$ $(\exists A \in \mathbb{R}^+)$ tel que $(\forall n \geq n_0)\ |u_n| \leq A$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

3 Toute suite positive est minorée par 0, et toute suite négative est majorée par 0.
4 Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
5 Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Application

1 Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{10n+8}{2n+1}$

2 Montrer que la suite (-1^n) nest pas monotone.

3 Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la suite (a^n) est monotone.

Soution

1 $u_{n+1} = \dfrac{10(n+1)+8}{2(n+1)+1} = \dfrac{10n+18}{2n+3}$,

$$u_{n+1}-u_n = \frac{10n+18}{2n+3} - \frac{10n+8}{2n+1} = \frac{10n+15+3}{2n+3} - \frac{10n+5+3}{2n+1}$$
$$= \frac{5(2n+3)+3}{2n+3} - \frac{5(2n+1)+3}{2n+1}$$
$$= 5+\frac{3}{2n+3} - (5+\frac{3}{2n+1}) = \frac{3}{2n+3} - \frac{3}{2n+1}$$

On sait que $2n+3 > 2n+1$ donc $\dfrac{3}{2n+3} < \dfrac{3}{2n+1}$ donc $u_{n+1}-u_n < 0$
et par suite la suite (u_n) est strictement décroissante.

2 $-1^1 = 1\,;\ -1^2 = 1\,;\ -1^3 = -1$ Alors (-1^n) nest pas monotone.

3 **disjonction des cas :** • $a = 1$ ou $a = 0 \Longrightarrow a^{n+1}-a^n = 0 \Longrightarrow$ la suite (a^n) est constante.
• $0 < a < 1 \Longrightarrow a-1 < 0 \Longrightarrow a^{n+1}-a^n = a^n(a-1) < 0 \Longrightarrow$ la suite (a^n) est décroissante.
• $a > 1 \Longrightarrow a-1 > 0 \Longrightarrow a^{n+1}-a^n = a^n(a-1) > 0 \Longrightarrow$ la suite (a^n) est croissante.

2 Suites arithmétiques et géométriques :

Définition

[Suite arithmétique et Suite géométrique]

1 La suite (u_n) est dite arithmétique lorsque $(\exists r \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N})\quad u_{n+1} = u_n + r$

2 La suite (v_n) est dite géométrique lorsque $(\exists q \in \mathbb{R}^*)\ (\forall n \in \mathbb{N})\quad v_{n+1} = q \times v_n$

3 Les nombres r et q sont appelés la raison de la suite.

Proposition

1 Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors : $(\forall n, p \in \mathbb{N})\quad u_n = u_p + r(n-p)$
• En particulier pour $p = 0$: $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = u_0 + rn$

2 Si (v_n) est une suite géométrique de raison q, alors : $(\forall n, p \in \mathbb{N})\quad v_n = v_p \times q^{n-p}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

• En particulier pour $p=0$: $(\forall n\in\mathbb{N})\ v_n=v_0\times q^n$

Proposition

1 Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors :

$$(\forall p\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}):n>p\Longrightarrow S_n=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n=(u_p+u_n)(\frac{n-p+1}{2})$$

• En particulier pour $p=0$: $S=u_0+u_1+\ldots+u_n=(u_0+u_n)(\frac{n+1}{2})$

2 Si (v_n) est une suite géométrique de raison $q\neq 1$, alors :

$$(\forall p\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}):n>p\Longrightarrow S_n=v_p+v_{p+1}+\ldots+v_n=v_p\times(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q})$$

• En particulier pour $p=0$: $S=v_0+v_1+\ldots+v_n=v_0\times(\frac{1-q^{n+1}}{1-q})$

Application

La suite numérique (u_n) est définie par récurrence : $u_0=4$ et $(\forall n\geq 0), u_{n+1}=\dfrac{7u_n+15}{u_n+9}$.

1 Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée strictement par 3.

2 Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3 Déduire que (u_n) est bornée.

4 On considère la suite numérique (v_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})\ v_n=\dfrac{u_n+5}{u_n-3}$

a Calculer v_0

b Montrer que (v_n) est géométrique de raison $q=3$.

c Déduire alors v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

d Calculer la somme $S=v_3+v_4+\ldots+v_{10}$

5 Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n=\dfrac{3v_n+5}{v_n-1}$.

6 Déduire u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Soution

1 pour $n=0$ $u_0=4>3$. Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $u_n>3$ et montrons que $u_{n+1}>3$:

On a $u_{n+1}-3=\dfrac{7u_n+15}{u_n+9}-3=\dfrac{7u_n+15}{u_n+9}-\dfrac{3(u_n+9)}{u_n+9}=\dfrac{7u_n+15-3(u_n+9)}{u_n+9}$

$=\dfrac{7u_n+15-3u_n-27}{u_n+9}=\dfrac{4u_n-12}{u_n+9}=\dfrac{4(u_n-3)}{u_n+9}$

Selon la supposition de récurrence On a $u_n>3\Longrightarrow u_n-3>0\Longrightarrow 4(u_n-3)>0$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

$u_n > 3 \Longrightarrow u_n + 9 > 12 > 0$ donc $u_{n+1} - 3 > 0$ par suite $u_{n+1} > 3$.
Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 3$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}$ Il faut déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n + 15}{u_n + 9} - u_n = \frac{7u_n + 15}{u_n + 9} - \frac{u_n(u_n + 9)}{u_n + 9} = \frac{7u_n + 15 - u_n^2 - 9u_n}{u_n + 9} = \frac{-u_n^2 - 2u_n + 15}{u_n + 9}$$

$$= \frac{-u_n^2 - 5u_n + 3u_n + 15}{u_n + 9} = \frac{-u_n(u_n + 5) + 3(u_n + 5)}{u_n + 9}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-u_n + 3)(u_n + 5)}{u_n + 9} = \frac{-(u_n - 3)(u_n + 5)}{u_n + 9}$$

D'après la question (1) On a $u_n > 3$ donc $u_n - 3 > 0 \Longrightarrow -(u_n - 3) < 0$
Par suite $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que (u_n) est strictement décroissante.

3 On a (u_n) est décroissante donc majorée par $u_0 = 4$
et D'après la question (1) (u_n) est minorée par 3
donc (u_n) est bornée plus précisément $(\forall n \in \mathbb{N})/3 \leq u_n \leq 4$

4 a)- $v_0 = \dfrac{u_0 + 5}{u_0 - 3} = \dfrac{4 + 5}{4 - 3} = 9$

b)- Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 5}{u_{n+1} - 3} = \frac{\dfrac{7u_n + 15}{u_n + 9} + 5}{\dfrac{7u_n + 15}{u_n + 9} - 3} = \frac{\dfrac{7u_n + 15}{u_n + 9} + \dfrac{5(u_n + 9)}{u_n + 9}}{\dfrac{7u_n + 15}{u_n + 9} - \dfrac{3(u_n + 9)}{u_n + 9}}$$

$$= \frac{7u_n + 15 + 5u_n + 45}{7u_n + 15 - 3u_n - 27} = \frac{12u_n + 60}{4u_n - 12} = \frac{12(u_n + 5)}{4(u_n - 3)}$$

$$= 3 \times \frac{u_n + 5}{u_n - 3} = 3 \times v_n$$

Par suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$.

c)- On a (v_n) est géométrique de raison $q = 3$ Alors :
$(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = v_0 \times 3^n = 9 \times 3^n = 3^{n+2}$.

d)- $S = v_3 + v_4 + \ldots + v_{10} = v_3 \times \left(\dfrac{1 - 3^{10-1+1}}{1 - 3}\right) = 3^5 \times \left(\dfrac{3^{10} - 1}{2}\right) = \dfrac{3^{15} - 3^5}{2}$

5 Soit $n \in \mathbb{N}$ On a

$$v_n = \frac{u_n + 5}{u_n - 3} \Longrightarrow v_n(u_n - 3) = u_n + 5 \Longrightarrow v_n u_n - 3v_n - u_n - 5 = 0 \Longrightarrow v_n u_n - u_n = 3v_n + 5$$

$$\Longrightarrow u_n(v_n - 1) = 3v_n + 5 \Longrightarrow u_n = \frac{3v_n + 5}{v_n - 1}$$

6 $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = 3^{n+2}$ et $u_n = \dfrac{3v_n + 5}{v_n - 1}$ Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{3 \times 3^{n+2} + 5}{3^{n+2} - 1} = \dfrac{3^{n+3} + 5}{3^{n+2} - 1}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

II LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE :

1 Les suites de limite finie (Suites convergentes) :

Activité

On considère un papier qui prend la forme d'un rectangle $ABCD$ de dimensions $AB = 2m$; et $AC = 1m$. Nous plions le papier en suivant l'algorithme suivante

■ On commence par calculer S_0 la surface initiale du rectangle.

■ Après plier le papier sur le segment formée par les milieux des deux segments horizontales du rectangle, On obtient donc un nouveau rectangle.

■ Calculer S_1 la surface du rectangle obtenu.

■ Puis on plie le nouveau rectangle sur le segment formée par les centres des deux segments verticales de ce rectangle.

■ On refait les même étapes en incrémentant l'indice de S_n.

On considère la suite numérique (S_n)

1. Calculer les valeurs S_0, S_1 et S_2.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ S_{n+1} = \dfrac{S_n}{2}$, Puis Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ S_n = \dfrac{2}{2^n}$
3. • En utilisant Excel, Calculer S_n pour tout n entier naturel inférieur à 1000.
   • Vers quelle valeur la suite (S_n) semble-t-elle tendre ?

Définition

[Limite finie d'une suite] On dit que la suite (u_n) a pour limite le réel l quand n tend vers $+\infty$ LORSQUE **tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir dun certain rang.**

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, ou tout simplement $\lim u_n = l$

Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$

Remarque

1. Autrement dit, on peut trouver une valeur de N pour laquelle les termes de la suite (u_n) sont aussi proches que lon veut de l.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ Alors on dit que (u_n) est convergente et converge vers l
   Sinon on dit que (u_n) est divergente.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - l = 0$
4. $|u_n - l| \leq \varepsilon \iff l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon \iff u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ ça explique la première définition donnée au dessus.
5. On peut utiliser une inégalité stricte dans la définition de convergence :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

• Il suffit de poser $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ dans la première définition.

Application

En utilisant la définition, Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Soution

Soit $\varepsilon > 0$ Il faut trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ Si $n \geq N$ Alors $|\frac{1}{n^2} - 0| \leq \varepsilon$.

On sait que $|\frac{1}{n^2} - 0| \leq \varepsilon \iff |\frac{1}{n^2}| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon \iff \frac{1}{n} \leq \sqrt{\varepsilon} \iff n \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

Donc Si on trouve $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ Alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ n \geq N \Longrightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \iff |\frac{1}{n^2}| \leq \varepsilon$.

Il est clair que Si $N = E(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}) + 10$ Alors $N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Conclusion : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow |\frac{1}{n^2}| \leq \varepsilon$ Et par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

T **Théorème**

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ Alors cette limite l est unique.

EXEMPLES

Par absurde : On suppose que $(\exists\, l' \neq l \in \mathbb{R})$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l'$

D'après la définition On a : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

et aussi $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N_2 \Longrightarrow |u_n - l'| < \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = \frac{|l-l'|}{2}$ càd $2\varepsilon = |l-l'|$

On a $(\exists N_1 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$ Et $(\exists N_2 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N_2 \Longrightarrow |u_n - l'| < \varepsilon$

On pose $N = Max(N_1, N_2)$ Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow n \geq N_1$ et $n \geq N_2$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$ et $|u_n - l'| < \varepsilon$

Ce qui donne $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| + |u_n - l'| < 2\varepsilon$.

Or d'autre part d'après l'inégalité triangulaire On a $(\forall a, b \in \mathbb{R})\ |a+b| \leq |a| + |b|$.

Donc $2\varepsilon = |l-l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| = |u_n - l| + |u_n - l'| < 2\varepsilon$

Donc $2\varepsilon < 2\varepsilon$ Ce qui est absurde.

Proposition

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et plus généralement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et plus généralement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[m]{n}} = 0$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$: • Si $a = 1$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

• Si $-1 < a < 1$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$

Remarque

1. Si $a \leq -1$ Alors (a^n) nadmet aucune limite.
2. On considère la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = (-1)^n$.
   La suite (u_n) est une suite qui prend successivement la valeur 1 quand n est pair et la valeur -1 quand n est impair, donc elle nadmet aucune limite, (u_n) est dite une suite divergente.

Application

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n + \frac{1}{3}$

Soution

On a $-1 < \frac{-1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

2 Les suites de limite infinie :

Activité

Les résultats du recensement générale de l'habitat de 2014 assure que le nombre de la population marocaine est prés de 34 millions.
les statistiques et les projections réalisées par le HCP pronostique que chaque année il y a une hausse de population estimée par 1%. On considère la suite numérique (P_n) définie par :
$(\forall n \in \mathbb{N})$ P_n= le nombre (par million) de la population marocaine à l'année $2014+n$.

1. Déterminer P_0, P_1 et P_2
2. Déterminer P_n en fonction de n.
3. Pronostiquer le nombre de la population marocaine en 2050.
4. Vers quelle valeur la suite (P_n) semble-t-elle tendre ?

Définition

[Les suites de limite infinie]

1. On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ LORSQUE :
   pour tout réel A, l'intervalle $[A;+\infty[$ **contient tous les termes de la suite** (u_n) **à partir d'un certain rang.**. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou tout simplement $\lim u_n = +\infty$
   Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff (\forall A > 0), (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A.$
2. (u_n) a pour limite $-\infty$ lorsque, $(-u_n)$ a pour limite $+\infty$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

Remarque

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ Alors On dit que la suite (u_n) Diverge vers $\pm\infty$.
2. Les suite divergentes sont les suites qui diverge vers $\pm\infty$ ou les suites qui n'admettent pas de limites. **Exemple :** La suite $(-1)^n$ n'admet pas de limite.

Application

Montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{3} - 2 = +\infty$

Soution

Soit $A > 0$ Il faut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})$ Si $n \geq N$ Alors $\dfrac{n^2}{3} - 2 > A$.

On sait que $\dfrac{n^2}{3} - 2 > A \iff \dfrac{n^2}{3} > A + 2 \iff n^2 > 3A + 6 \iff n > \sqrt{3A+6}$

Donc Si on trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \sqrt{3A+6}$

Alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow n > \sqrt{3A+6} \iff \dfrac{n^2}{3} - 2 > A$.

Il est clair que Si $N = E(\sqrt{3A+6}) + 1$ Alors $N > \sqrt{3A+6}$

Conclusion : $(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow \dfrac{n^2}{3} - 2 > A$

Et par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{3} - 2 = +\infty$

Proposition

1. Soit $q \in \mathbb{Q}_+^*$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^q = +\infty$.
   ▶ En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$: Si $a > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

3 Opérations sur les limites des suites :

Remarque

Les tableaux des Opérations sur les limites des fonctions qu'on a vu précédemment restent valables pour les limites des suites.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et deux réels l et l'.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

Proposition

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Proposition

$\lim u_n$	l	l_+	l_+	l_-	l_-	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim u_n \times v_n$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Proposition

Cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$

Si $\lim u_n =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Et $\lim v_n =$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
Alors $\lim \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

$\lim u_n$	l_+ ou $+\infty$	l_- ou $-\infty$	l_+ ou $+\infty$	l_- ou $-\infty$	0
$\lim v_n$	0^+	0^+	0^-	0^-	0
$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Remarque

1. ń F.I. ż signifie forme indéterminée : on ne peut pas déterminer la limite par simple lecture du tableau.
   Les formes indéterminées FI sont : "$+\infty - \infty$" , "$0 \times \infty$", "$\dfrac{\infty}{\infty}$" et "$\dfrac{0}{0}$".
2. l_+ signifie $l > 0$ et l_- signifie $l < 0$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ signifie que (v_n) converge vers 0 avec $v_n > 0$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^-$ signifie que (v_n) converge vers 0 avec $v_n < 0$

Application

Calculer les limites suivantes : 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} -8n^4+6n^3-7n$, 2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3-n}{-5n+n^3}$, 3 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}-$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

$\sqrt{n}$

Soution

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} -8n^4+6n^3-7n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^4\left(-8+\frac{6}{n}-\frac{7}{n^3}\right) = -\infty$

Car : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6}{n}-\frac{7}{n^3} = 0$

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^3-n}{-5n+n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3(5-\frac{1}{n^2})}{n^3(\frac{-5}{n^2}+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5-\frac{1}{n^2}}{\frac{-5}{n^2}+1} = 5$

Car : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-5}{n^2} = 0$

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\frac{1}{n\sqrt{n}}-\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1+\frac{1}{n^3\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right) = +\infty$

Car : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = 0$

Application

Soit $a \in \mathbb{R}$, On considère la suite (S_n) Définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\ S_n = 1+a+a^2+\ldots+a^n$

► Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Soution

• Si $a = 1$ Alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ S_n = n+1$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

• Si $a \neq 1$ Alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ S_n = 1 \times \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ (somme des termes d'une suite géométrique)

Donc on distingue 3 cas :

► Si $-1 < a < 1$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$ Et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$.

► Si $a > 1$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n+1} = +\infty$ Or $a > 1 \Longrightarrow 1-a < 0$

Et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = +\infty$.

► Si $a \leq -1$ Alors (a^n) diverge et donc (S_n) diverge aussi.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

III Les critères de convergence d'une suite :

1 La monotonie et la convergence :

T Théorème

1. Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle est convergente.
2. Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle est convergente.

EXEMPLES

1. admis
2. Il suffit d'appliquer 1 pour la suite (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = -u_n$

Application

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $(\forall n \geq 0), u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 15}{u_n + 9}$.
Montrer que la suite (u_n) est décroissante minorée par 3. Et déduire :

Soution

D'après la deuxième application dans ce cours on a la suite (u_n) est décroissante minorée par 3 alors (u_n) est convergente.

Remarque

1. Si (u_n) est une suite croissante non majorée, alors elle est divergente et diverge vers $+\infty$
2. Si (u_n) est une suite décroissante non minorée, alors elle est divergente et diverge vers $-\infty$

EXEMPLES

1. Soit $A > 0$, comme (u_n) est une suite non majorée, Alors $(\exists N \in \mathbb{N})$ tel que $u_N \geq A$.
   Et puisque (u_n) est une suite croissante donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow u_n \geq u_N \geq A$
   C'est la définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. Il suffit d'appliquer 1 pour la suite (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = -u_n$

T Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

EXEMPLES

On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
On a Alors tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir dun certain rang. ça veut dire que $(\exists n_0 \in \mathbb{N})/(\forall n \geq n_0) u_n \in]l-1; l+1[$
On prend : M=MAX$\{u_0, u_1, u_2 ... u_{n_0}, l+1\}$ & m=MIN$\{u_0, u_1, u_2 ... u_{n_0}, l-1\}$
Par suite $(\forall n \geq 0) m \leq u_n \leq M$

Remarque

1. La réciproque est fausse. **Contre exemple :** Si on considère la suite $u_n = (-1)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
la suite (u_n) est bornée mais elle est divergente.
2. **Attention :** Si (u_n) est croissante et majorée par $\alpha \in \mathbb{R}$, (ou elle est décroissante minorée par α)
Alors (u_n) converge mais ne converge pas forcément vers α.
Cependant les théorèmes suivants nous donner une idée sur la limite

2 Limites des suites et comparaison (Limites et l'ordre) :

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, et $k \in \mathbb{R}$.

1. Si $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tel que $(\forall n \geq n_0)$ $u_n \leq k$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq k$
2. En générale Si $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tel que $(\forall n \geq n_0)$ $u_n \leq v_n$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

EXEMPLES

1. Par absurde supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l > k$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$
Si on prend $\varepsilon = l - k > 0$
Donc $(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < l - k$
Or on a $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tel que $(\forall n \geq n_0)$ $u_n \leq k$
Si on pose $M = Max(N, n_0)$
Alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq M \Longrightarrow |u_n - l| < l - k$ et $u_n \leq k$
Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq M \Longrightarrow k - l < u_n - l < l - k$ et $u_n \leq k$
Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq M \Longrightarrow k < u_n$ et $u_n \leq k$ Ce qui est absurde.
2. On applique le résultat 1 sur la suite $(u_n - v_n)$ Pour $k = 0$

Remarque

1. De même on a Si $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tel que $(\forall n \geq n_0)$ $k \leq u_n$ Alors $k \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

2 **Attention :** Le théorème suppose que (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3 Faire entrer la limite sur une inégalité stricte ne donne pas forcement une inégalité stricte.
CÀD Si $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tel que $(\forall n \geq n_0)\ u_n < v_n$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

EXEMPLE : $(\forall n \geq 1)\ \dfrac{1}{n} > 0$ Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

T **Théorème**

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numérique telles que $(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0)\ u_n \leq v_n$

1 Si $\lim u_n = +\infty$ Alors $\lim v_n = +\infty$

2 Si $\lim v_n = -\infty$ Alors $\lim u_n = -\infty$

EXEMPLES

1 Soit $A > 0$ on a $\lim u_n = +\infty \Longrightarrow (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A$.
Or $(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0)\ u_n \leq v_n$
Donc si on prend $M = Max(N, n_0)$ Alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq M \Longrightarrow v_n \geq u_n \geq A$
Ce qui signifie que $\lim v_n = +\infty$

2 Il suffit d'appliquer 1 pour les deux suite $(-v_n)$ et $(-u_n)$

T **Théorème**

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et $l \in \mathbb{R}$..
Si • $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \geq n_0)\ v_n \leq u_n \leq w_n$
• (v_n) et (w_n) sont convergentes et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$
Alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

EXEMPLES

Soit $\varepsilon > 0$, On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ Donc $(\exists N_1 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N_1 \Longrightarrow |v_n - l| \leq \varepsilon$
Et On a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ Donc $(\exists N_2 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N_2 \Longrightarrow |w_n - l| \leq \varepsilon$
Or on a $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \geq n_0)\ v_n \leq u_n \leq w_n$
Donc si on prend $M = Max(n_0, N_1, N_2)$
D'une part On a $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq M \Longrightarrow |v_n - l| \leq \varepsilon$ Et $v_n \leq u_n$ (CAR $n \geq N_1$ Et $n \geq n_0$)
Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq M \Longrightarrow l - v_n \leq \varepsilon$ Et $l - u_n \leq l - v_n$
Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq M \Longrightarrow l - u_n \leq \varepsilon$
Et d'autre part On a $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq M \Longrightarrow |w_n - l| \leq \varepsilon$ Et $u_n \leq w_n$ (CAR $n \geq N_2$ Et $n \geq n_0$)
Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq M \Longrightarrow w_n - l \leq \varepsilon$ Et $u_n - l \leq w_n - l$
Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq M \Longrightarrow u_n - l \leq \varepsilon$
Et par suite : $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq M \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$ ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

Théorème

Soient (u_n) et (α_n) deux suites et $l \in \mathbb{R}$.
Si • $(\exists N \in \mathbb{N})$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \alpha_n$
• $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.
Alors : (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

EXEMPLES

Il suffit d'appliquer Le Théorème des gendarmes sur les trois suite (u_n), $(l-\alpha_n)$ et $(l+\alpha_n)$.

Remarque

Le théorème de majoration est le plus utilisé dans les exercices.

Application

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim(3n+5)^n$ 2 $\lim \dfrac{1}{n+\cos n}$ 3 $\lim \dfrac{n+\sin n}{n}$

Soution

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On a $3n+5 > 1 \Longrightarrow (3n+5)^{n-1} > 1 \Longrightarrow (3n+5)^n > 3n+5$
Et donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (3n+5)^n > 3n+5$
Or $\lim 3n+5 = +\infty$
Donc d'après le Théorème de comparaison $\lim(3n+5)^n = +\infty$

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*/\{1\}$ On a $-1 \leq \cos n \leq 1 \Longrightarrow -1+n \leq \cos n+n \leq 1+n \Longrightarrow \dfrac{1}{1+n} \leq \dfrac{1}{\cos n+n} \leq \dfrac{1}{-1+n}$
Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*/\{1\})\ \dfrac{1}{1+n} \leq \dfrac{1}{\cos n+n} \leq \dfrac{1}{-1+n}$
Or $\lim \dfrac{1}{1+n}\ \lim \dfrac{1}{-1+n} = 0$
Donc d'après le Théorème des gendarmes On a $\lim \dfrac{1}{n+\cos n} = 0$

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On a $-1 \leq \sin n \leq 1 \Longrightarrow \dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n} \Longrightarrow \dfrac{-1}{n}+1 \leq \dfrac{\sin n}{n}+1 \leq \dfrac{1}{n}+1$
Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \dfrac{-1}{n}+1 \leq \dfrac{n+\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}+1$
Or $\lim 1-\dfrac{1}{n} = \lim 1+\dfrac{1}{n} = 1$
Donc d'après le Théorème des gendarmes On a $\lim \dfrac{n+\sin n}{n} = 0$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

IV Les suites de types $v_n = f(u_n)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$:

1 Les suites de type $v_n = f(u_n)$:

Activité

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$, Et soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ f(u_n) = \dfrac{1}{n} - 1$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ et $f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$.

Propriété

Si f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite converge vers $l \in I$.
Alors La suite $v_n = f(u_n)$ est aussi convergente et converge vers $f(l)$.
Autrement dit : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et si f continue en l Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$

Application

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{n}} + 1}}$

Soution

On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x+1}}$

Donc on a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ f(v_n) = \dfrac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{n}} + 1}}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{n}} + 1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et f est une fonction continue en 0
Alors d'après la propriété $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = f(0) = 0$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

2 Les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$:

Activité

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{5x+6}$,
Et soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$, et $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Déterminer $f([5;6])$, et résoudre dans l'intervalle $[5;6]$ l'équation $f(x) = x$.
2. Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 5 \leq u_n \leq 6$
3. Tracer C_f et u_0, u_1 , u_2 , u_3 , u_4 et u_5. (GEOGEBRA)
4. Conjecturer graphiquement $\lim u_n$
5. a. Montrer que (u_n) est croissante, et Déduire que (u_n) est convergente.
   b. On pose $\lim u_n = l$, Montrer que l est une solution de l'équation $f(x) = x$
   c. Déduire que $l = 6$.

Remarque

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = u_{n+1}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, tel que $f(I) \subset I$. Et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = a \in I$, et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers l, Alors l est un point fixe de f
Autrement dit : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ Alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$

Application

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{u_n}$

Soution

On pose $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ et $I = [1;3]$: On a f est dérivable sur I donc continue sur I
Et on a $f'(x) = \dfrac{-2}{x^2} < 0$ Donc f est décroissante sur I
Et on a $f(I) = [f(3); f(1)] = [1.67;3]$ Donc $f(I) \subset I$, aussi On a $u_0 = 1 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 1 (simple à vérifier) Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
Donc d'après la propriété si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ Alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$

On a $f(l) = l \iff \dfrac{l+2}{l} = l \iff l+2 = l^2 \iff l = -1$ ou $l = 2$
Or on a $u_n \in I$ car $f(I) \subset I$ Donc $l \in I$ Et par suite $l = 2$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

V Les suites adjacentes :

Définition

[Suites adjacentes] Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si :

1 (u_n) est croissante 2 (v_n) est décroissante 3 $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

T **Théorème**

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, Alors elles sont convergentes et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

Remarque

De plus on a $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\leqslant l\leqslant v_n$

Application

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n=\dfrac{1}{1-\sqrt{n+1}}$ et $v_n=\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$

Montrez que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

- ⋆ SOLUTION : ⋆ -

Soit $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{1-\sqrt{n+2}}-\frac{1}{1-\sqrt{n+1}}=\frac{1-\sqrt{n+1}-(1-\sqrt{n+2})}{(1-\sqrt{n+1})(1-\sqrt{n+2})}$$
$$=\frac{1-\sqrt{n+1}-1+\sqrt{n+2}}{(1-\sqrt{n+1})(1-\sqrt{n+2})}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(1-\sqrt{n+1})(1-\sqrt{n+2})}$$

Or on a $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}>0$ aussi on a $1-\sqrt{n+1}\leq 0$ et $1-\sqrt{n+2}<0$

Donc $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-u_n\geq 0$

Ce qui signifie que La suite (u_n) est croissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$ $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{2\sqrt{n+2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}=\dfrac{2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+2}}{4\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}}$

Or on a $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+2}\leq 0$ aussi on a $4\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}>0$ Donc $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_{n+1}-v_n\leq 0$

ce qui signifie que La suite (v_n) est décroissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$

$$u_n-v_n=\frac{1}{1-\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}}=\frac{2\sqrt{n+1}-(1-\sqrt{n+1})}{2\sqrt{n+1}(1-\sqrt{n+1})}$$
$$=\frac{2\sqrt{n+1}-1+\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n+1}(1-\sqrt{n+1})}=\frac{3\sqrt{n+1}-1}{2\sqrt{n+1}(1-\sqrt{n+1})}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}\left(3-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{2\sqrt{n+1}(1-\sqrt{n+1})}=\frac{3-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{2(1-\sqrt{n+1})}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today

Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

Et par suite : les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, Tomorrow better than today