ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2022

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Géométrie de l'espace** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Calculs des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Équations différentielle et calcul intégral** ..... **2,5 points**
- Problème : **Etude de fonctions numérique et suites numériques** ... **8,5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère les points $A\,(0,1,1)$, $B\,(1,2,0)$ et $C\,(-1,1,2)$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$

0,25 pt **b)** En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2 - Soit (S) la sphère de centre $\Omega\,(1,1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$.

0,5 pt Déterminer une équation de la sphère (S).

0,5 pt **3 -** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

4 - On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

0,25 pt **a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées.

0,5 pt **c)** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$, puis en déduire la distance $d\,(A,(\Delta))$

Exercice 2 : (3 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a=-1-i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b=-1+i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

0,5 pt **1 -** Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d=-2$

2 - On considère la rotation R de centre D et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

0,5 pt Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c=-4$

0,5 pt **3 - a)** Écrire le nombre $\dfrac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

0,5 pt **b)** En déduire que $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2=\dfrac{c-d}{b-d}$

4 - Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartient aux deux cercles (Γ) et (Γ')

0,25 pt **a)** Vérifier que $|z+2|=2$

0,5 pt **b)** Prouver que $z+\bar{z}=-8$ (remarquer que $|z|=4$)

0,25 pt **c)** En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasared simultanément trois boules de l'urne.

0,75 pt **1 -** Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{6}$; où A est l'évènement **"N'obtenir aucune boule rouge"**

0,75 pt **2 -** Calculer $p(B)$; où B est l'évènement **"Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes"**

Yassine Elamri

0,75 pt **3 -** Montrer que $p(C) = \frac{1}{2}$; où C est l'évènement **"Obtenir exactement une boule rouge"**

0,75 pt **4 -** Calculer (D) ; où D est l'évènement **"Obtenir au moins deux boules rouges"**

Exercice 4 : (2,5 pts)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x+1)\,e^x$

0,75 pt **1 - a)** Vérifier que $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx$

0,75 pt **b)** A l'aide d'une intégration par partie calculer $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2\,e^x\,dx$

0,5 pt **2 - a)** Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 0$

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$

Problème : (8,5 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ (unité : 1 cm)

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0,5 pt **2 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

0,5 pt **3 - a)** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0,75 pt **b)** Étudier le signe de $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

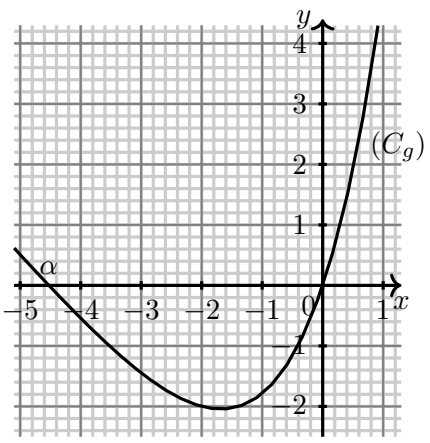
0,5 pt **4 - a)** Montrer que $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 pt **b)** Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

0,5 pt **5 - a)** Montrer que $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\,g(x)$ où $g(x) = (2x+4)\,e^{\frac{x}{2}} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 pt **b)** A partir de la courbe ci-contre de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha) = 0$)



0,5 pt **c)** Étudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

1 pt **6 -** Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$
(On prend : $\ln(4) \simeq 1,4$; $\alpha \simeq -4,5$ et $f(\alpha) \simeq -3,5$)

0,5 pt **7 - a)** Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

Yassine Elamri

0,25 pt **b)** Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln(4))$

8 - Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **a)** Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln(4)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante

0,25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente

0,5 pt **d)** Calculer la limite de la suite (u_n)

FIN

Yassine Elamri