Les racines carrées

I racine carrée d'un nombre réel positif

1 Activités

Activité

En utilisant la calculatrice, ou non, remplir le tableau suivant :

x	0	1	144	0.64	$\frac{81}{49}$
$\sqrt{x}$	…	…	…	…	…

Activité

Remplir le vide par le nombre positif qui convient :

$(\ldots)^2 = 9$; $(\ldots)^2 = 7$; $(\ldots)^2 = \frac{25}{36}$; $(\ldots)^2 = \sqrt{5}$

$(\sqrt{5})^2 = \ldots$; $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \ldots$; $\left(\frac{-1}{8}\right)^2 = \ldots$; $(\ldots)^2 = \frac{\sqrt{3}}{16}$

2 Définition

Définition

Soit a un nombre réel positif non nul (c'est à dire : $a \geqslant 0$)
La racine carrée de a est le nombre réel positif dont le carrée est égale à a noté $\sqrt{a}$

Résultat

Soit a un nombre réel positif
$\sqrt{a^2} = a$
$(\sqrt{a})^2 = a$
L'opposé de $\sqrt{a}$ (avec $a \neq 0$) est $-\sqrt{a}$

Remarque

- $\sqrt{a}$ n'a pas de sens que si $a \geqslant 0$, c'est à dire que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas
- La racine carrée d'un nombre n'est jamais égale à un nombre négatif.
- $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$

Yasine Elamri

EXEMPLES

★ $\sqrt{0}=0$ car $0^2=0$. ★ $\sqrt{1}=1$ car $1^2=1$. ★ $\sqrt{9}=3$ car $3^2=9$.

★ $\sqrt{49}=07$ car $7^2=49$. ★ $\sqrt{81}=9$ car $9^2=81$.

A apprendre par coeur ♥ (Carrés parfaits)

✪ $\sqrt{0}=0$ ✪ $\sqrt{1}=1$ ✪ $\sqrt{4}=2$ ✪ $\sqrt{9}=3$

✪ $\sqrt{16}=4$ ✪ $\sqrt{25}=5$ ✪ $\sqrt{36}=6$ ✪ $\sqrt{49}=7$

✪ $\sqrt{64}=8$ ✪ $\sqrt{81}=9$ ✪ $\sqrt{100}=10$ ✪ $\sqrt{121}=11$

Application

★ $\sqrt{144}=\ldots\ldots$

★ $\sqrt{\frac{1}{9}}=\ldots\ldots$

★ $\sqrt{\frac{16}{25}}=\ldots\ldots$

★ $\frac{3}{\sqrt{81}}=\ldots\ldots$

★ $\sqrt{\frac{0.36}{0.25}}=\ldots\ldots$

★ $\sqrt{\frac{121}{94}}=\ldots\ldots$

Solution

★ $\sqrt{144}=\sqrt{12^2}=12$

★ $\sqrt{\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{1}{3^2}}=\frac{1}{3}$

★ $\sqrt{\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{4^2}{5^2}}=\frac{4}{5}$

★ $\frac{3}{\sqrt{81}}=\frac{3}{\sqrt{9^2}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

★ $\sqrt{\frac{0.36}{0.25}}=\sqrt{\frac{0.6^2}{0.5^2}}=\frac{0.6}{0.5}=\frac{6}{5}$

★ $\sqrt{\frac{121}{4}}=\sqrt{\frac{11^2}{2^2}}=\frac{11}{2}$

3 Le carré d'une racine carrée

Propriété

a un nombre réel.

★ si $a>0$; $\sqrt{a^2}=\sqrt{a}^2=a$

★ si $a<0$; $\sqrt{a^2}=\sqrt{-a}^2=-a$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

EXEMPLES

- ★ $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$
- ★ $\sqrt{(-3)^2} = 3$
- ★ $\sqrt{\left(\frac{-6}{7}\right)^2} = \frac{6}{7}$
- ★ $\sqrt{\sqrt{9}^2} = \sqrt{9} = 3$
- ★ $\sqrt{\frac{11}{5}^2} = \frac{11}{5}$
- ★ $\sqrt{\sqrt{2}^{2^2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

Application

Simplifier ce qui suit :

- ★ $\sqrt{\sqrt{16}}$
- ★ $\sqrt{\left(7+\sqrt{2}\right)^2}$
- ★ $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}^2}$
- ★ $\sqrt{\sqrt{5}^{2^2}}$
- ★ $\sqrt{7+\sqrt{2}^2}$
- ★ $\sqrt{\left(-7-\sqrt{5}\right)^2}$

Solution

- ★ $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{\sqrt{4^2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$
- ★ $\sqrt{\left(7+\sqrt{2}\right)^2} = 7+\sqrt{2}$
- ★ $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}^2} = \frac{\sqrt{2}}{7}$
- ★ $\sqrt{\sqrt{5}^{2^2}} = \sqrt{5}^2 = 5$
- ★ $\sqrt{7+\sqrt{2}^2} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = \sqrt{3}^2 = 3$
- ★ $\sqrt{\left(-7-\sqrt{5}\right)^2} = -\left(-7-\sqrt{2}\right) = 7+\sqrt{2}$ car $-7-\sqrt{2} < 0$

II Résolution de l'équation : $x^2 = a$

1 Premier cas : $a > 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à :

$$\begin{aligned} x^2 - a &= 0 \\ x^2 - \sqrt{a}^2 &= 0 \\ (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) &= 0 \\ x-\sqrt{a} = 0 \quad &ou \quad x+\sqrt{a} = 0 \\ x = \sqrt{a} \quad &ou \quad x = -\sqrt{a} \end{aligned}$$

2 Deuxième cas : $a = 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à :

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation admet l'unique solution 0.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Troisième cas : $a < 0$

L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution réel.

Règle

Solution de l'équation $x^2 = a$	
Si $a > 0$	L'équation admet deux solution $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
Si $a = 0$	L'équation admet une unique solution 0
Si $a < 0$	L'équation n'admet pas de solution

Application

Résoudre les équations suivantes :

$2x^2 = 6$; $-13 + x^2 = -4$; $3x^2 + 15 = 3$; $2\left(x^2 - 1\right) = -2$

Solution

★ l'équation $2x^2 = 6$ est respectivement équivalente à :
$x^2 = \dfrac{6}{2}$
$x^2 = 3$
$x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
Cette équation admet deux solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$

★ l'équation $-13 + x^2 = -4$ est respectivement équivalente à :
$x^2 = -4 + 13$
$x^2 = 9$
$x^2 = 3^2$
$x = 3$ ou $x = -3$
Cette équation admet deux solutions -3 et 3

★ l'équation $3x^2 + 15 = 3$ est respectivement équivalente à :
$3x^2 = 3 - 15$
$3x^2 = -12$
$x^2 = \dfrac{-12}{3}$
$x^2 = -4$
Donc cette équation n'admet pas de solution

★ l'équation $2\left(x^2 - 1\right) = -2$ est respectivement équivalente à :
$2x^2 - 2 = -2$
$2x^2 = -2 + 2$
$2x^2 = 0$
$x^2 = \dfrac{0}{2}$
$x^2 = 0$
$x = 0$
La solution de cette équation admet est le nombre 0

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Les operations sur les racines carrées

1 Racine carrée et produit

a Propriété

Propriété

Soient a et b deux nombres réels positifs.
$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

Exemples

★ $\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{2\times 6}=\sqrt{12}$
★ $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{2\times 12}=\sqrt{36}=6$
★ $\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times(-\sqrt{10})=-\sqrt{2\times 5\times 10}=-\sqrt{100}=-10$
★ $\sqrt{125}=\sqrt{25\times 5}=\sqrt{25}\times\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

b Proposition

Proposition

Extraire un carré parfait

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls
$\sqrt{a^2\times b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

Exemples

★ $\sqrt{3^2\times 7}=3\sqrt{7}$
★ $\sqrt{25\times 7}=\sqrt{5^2\times 7}=5\sqrt{7}$
★ $\sqrt{49\times 5}=\sqrt{7^2\times 5}=7\sqrt{5}$
★ $\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$
★ $\sqrt{2^2\times 5^2\times 3}=2\times 5\sqrt{3}=10\sqrt{3}$
★ $\sqrt{5^3}=\sqrt{5^2\times 5}=5\sqrt{5}$
★ $\sqrt{3^2\times 7}\times\sqrt{2^2\times 3}=3\sqrt{7}\times 2\sqrt{3}=3\times 2\sqrt{7}\times\sqrt{3}=6\sqrt{7\times 3}=6\sqrt{21}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

c Techniques et astuces (Décomposition)

Simplifions $\sqrt{180}$, pour cela, on décompose 180.

$$\begin{array}{rl} \textit{Donc} & 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ \textit{Donc} & \sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} \\ & = 2 \times 3\sqrt{5} \\ & = 6\sqrt{5} \end{array}$$

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

2 Racines carrées et puissances

✸ $A = \sqrt{5^6} = \sqrt{(5^3)^2} = 5^3 = 125$

✸ $B = \sqrt{7^5} = \sqrt{7^4 \times 7} = \sqrt{(7^2)^2 \times 7} = 7^2\sqrt{7} = 49\sqrt{7}$

Application

Simplifier et calculer :

✸ $a = \sqrt{\sqrt{3^4} \times 5^2 \times 2^7}$

✸ $b = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$

✸ $c = \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9}$

✸ $d = \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$

✸ $e = \left(3\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)$

Solution

★ $a = \sqrt{\sqrt{3^4} \times 5^2 \times 2^7}$

$a = \sqrt{\sqrt{3^{2^2}} \times 5^2 \times 2^6 \times 2}$

$a = \sqrt{\sqrt{3^{2^2}} \times 5^2 \times 2^{3\times 2} \times 2}$

$a = \sqrt{3^2 \times 5^2 \times (2^3)^2 \times 2}$

$a = \sqrt{3^2 \times 5^2 \times 8^2 \times 2}$

$a = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{8^2} \times \sqrt{2}$

$a = 3 \times 5 \times 8 \times \sqrt{2}$

$a = 120\sqrt{2}$

★ $b = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$

$b = \sqrt{4 + 9 + 36}$

$b = \sqrt{49}$

$b = \sqrt{7^2}$

$b = 7$

★ $c = \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9}$

$c = \sqrt{5^2} + \sqrt{9^2} - 2\sqrt{3^2}$

$c = 5 + 9 - 2 \times 3$

$c = 5 + 9 - 6$

$c = 8$

★ $d = \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$

$d = \sqrt{16 \times 6} + 2\sqrt{4 \times 6} - 3\sqrt{9 \times 6}$

$d = \sqrt{16}\sqrt{6} + 2\sqrt{4}\sqrt{6} - 3\sqrt{9}\sqrt{6}$

$d = 4\sqrt{6} + 2 \times 2\sqrt{6} - 3 \times 3\sqrt{6}$

$d = 4\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 9\sqrt{6}$

$d = (4 + 4 - 9)\sqrt{6}$

$d = -\sqrt{6}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

★ $e = \left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$

$e = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{5}^2$

$e = 3^2 \times \sqrt{2}^2 - 5$

$e = 9 \times 2 - 5$

$e = 18 - 5$

$e = 13$

3 Racines carrées et division

Proposition

Soient a et b deux nombres réels positifs et $b \neq 0$

➠ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

EXEMPLES

★ $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$

★ $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$

★ $\sqrt{\dfrac{3}{25}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$

★ $\dfrac{-\sqrt{60}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{\dfrac{60}{5}} = -\sqrt{12} = -\sqrt{4\times 3} = -\sqrt{2^2\times 3} = -\sqrt{2^2}\times\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

Proposition

Soient a et b deux nombres réels positifs et $b \neq 0$

➠ $\sqrt{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{b}}{b}$

➠ $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

EXEMPLES

★ $\sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{\sqrt{4^2}} = \dfrac{1}{4}$

★ $\sqrt{\dfrac{1}{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$

★ $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

★ $\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

★ $\sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{35}}{5}$

a Supression de la racine carrée du dénominateur

(Rendre le dénominateur rationnel)

❶ cas 1 : Dénominateur ne contenant pas $+$ ou $-$

➠ $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

➠ $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{5\times 2} = \frac{\sqrt{6}}{10}$

➠ $\frac{2+\sqrt{7}}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}(2+\sqrt{7})}{3\times 11} = \frac{2\sqrt{11}+\sqrt{77}}{33}$

❷ cas 2 : Dénominateur contenant $+$ ou $-$

Définition

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

➠ Le conjugué de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

➠ Le conjugué de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

➠ On dit que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sont conjugués entre eux.

EXEMPLES

➠ $\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} &= \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}\\ &= \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\sqrt{2^2}-\sqrt{5^2}}\\ &= \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2-5}\\ &= \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{-3}\\ &= -(\sqrt{2}-\sqrt{5})\\ &= \sqrt{5}-\sqrt{2}\end{aligned}$

➠ $\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{6})}{(4-\sqrt{6})(4+\sqrt{6})}\\ &= \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{18})}{4^2-\sqrt{6^2}}\\ &= \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{3^2\times 2})}{16-6}\\ &= \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today