Notion de logique

Séries des exercices

Exercice

Écrire en utilisant les quantificateurs logique , les propositions suivantes :

1. (R_1) : " Pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel m tel que $n = 2m$ "
2. (R_2) : " Pour tout réel x et y , il existe un entier naturel n tel que x+y=n "
3. (R_3) : " Le carré de tout réel et positive "
4. (R_4) : " $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante"

Exercice

1. (P_1) : $(-3)^2 = 9$ et $\sqrt{9} = -3$
2. (P_2) : $(\pi \in \mathbb{Q})$ ou $(\sqrt{3}+\sqrt{7} > 3)$
3. (P_3) : $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 1)$
4. (P_4) : $(\exists x \in \mathbb{N} : 3n+1 = 0)$

Exercice

Donner la négation des propositions suivantes :

1. $(P) : (\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2); (a^2+b^2 \geqslant ab \quad ou \mid a \mid + \mid b \mid \geqslant \mid a+b \mid)$
2. $(Q) : (\exists x \in \mathbb{Z}); (x+1 > x)$
3. $(R) : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow x = y$
4. $(S) : (\forall x \in \mathbb{N}^\star); x \neq 1 \Rightarrow x \geqslant y$

Exercice

1. Montrer en utilisant la table de vérité que (Lois de MORGAN) :
   a. $\overline{(p \quad et \quad q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \quad ou \quad \overline{q})$
   b. $\overline{(p \quad ou \quad q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \quad et \quad \overline{q})$
2. Montrer que : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \quad ou \quad q)$
3. On déduire que : $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \quad et \quad \overline{q})$

Yassine Elamri

Exercice

1. On considèrent la proposition P suivants : $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2+xy+y^2=0$
   a. Donner la negation de P .
   b. Montrer que P est fausse
2. On considèrent la proposition R suivants : $(\forall x \in [0,2])(\exists y \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]) : xy-x+2y-1=0$
   a. Donner la négation de P .
   b. Montrer que P est vraie
3. On considèrent la proposition Q suivants : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : y^2-3xy^2+2x^2=1$
   a. La proposition Q est elle vraie ? Justifier votre réponse
   b. Déterminer la négation de la proposition Q

Exercice

1. Montrer que : $x \neq 5 \Rightarrow \dfrac{x+3}{x-3} \neq 4, \forall x \neq 3$
2. Montrer que :$(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+) : a \neq b \Rightarrow \dfrac{a^2+5}{a^2+2} \neq \dfrac{b^2+5}{b^2+2}$
3. Montrer que :$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : (xy \neq 1 \quad et \quad x \neq y) \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1} \neq \dfrac{y}{y^2+y+1}$

Exercice

Montre les implications suivants :

1. $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*) \ : 2x+y=1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^2+y^2} \leqslant 20$
2. $(\forall a,b,c \in \mathbb{R}) : [\quad |a-b| \leqslant c \quad et \quad |a+b| \leqslant c \quad] \quad \Rightarrow \quad |ab| \leqslant \dfrac{c^2}{2}$
3. $(\forall a,b,c \in \mathbb{R}) : \quad a>0 \quad et \quad b>0 \quad et \quad c>0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b} \geqslant a+b+c$

Exercice

Montre les équivalences suivants :

1. $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : 1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \geqslant 0$

Yassine Elamri

2 $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \sqrt{\dfrac{x^2+3x+1}{5}} \geqslant \sqrt{x}$

3 Montrer que $\forall x, y \in]1, +\infty[$ on a $x+y+2\sqrt{(x-1)(y-1)} > 2$

Exercice

1 Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x + 1$, Montrer que f ni paire ni impaire

2 Montrer que la proposition P : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $3cosx \neq 2sin^2x$ est une proposition fausse

3 Montrer que la proposition : Tout entier naturel divisible par 2 et par 6 est divisible par 12 est fausse

Exercice

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ on a $4|n^2$ *ou* $4|n^2 - 1$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 - |x-3| - 4 = 0$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} 2|x+1| - y = 4 \\ |x+2| + 2y = 6 \end{cases}$$

Exercice

1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star ; 1+3+5+.....+(2n+1) = (n+1)^2$

2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star ; 1+2+3+.....+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star ; 1^2+2^2+3^2+.....+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star ; 1^3+2^3+3^3+.....+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star - 1 ; \quad 1 \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$

6 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1+3+3^2+.....+3^n = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

7 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, 3 divise $3^n + 4^n - 1$

Yassine Elamri

8 Soit x un réel strictement positif Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (1+n)^n \geqslant 1+nx$

a En déduire que $\forall x \in \mathbb{N}^\star$,on a :$3^n > n$

b En déduire que $\forall x \in \mathbb{N}^\star$,on a :$(n+1)^n \geqslant 2n^n$

Yassine Elamri