Chapitre

Notions de logique

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• **On approchera les propositions, les lois logiques et les méthodes de raisonnement, à partir d'activités variées et diverses, issues des acquis de l'élève et de situations déjà rencontrées.** • **On évitera toute construction théorique et toute utilisation excessive de tableaux de vérité.**	• **Utiliser le raisonnement convenable selon la situation étudiée.** • **Rédiger des raisonnements mathématiques et des démonstrations claires et logiquement correctes.** • **Étudier la vérité d une proposition logique.** • **Comprendre le sens d une proposition logique et donner sa négation.**

Contenu du programme	Les extensions
• Propositions ; opérations sur les propositions ; les quantificateurs. • Les raisonnements mathématiques : raisonnement par l'absurde ; raisonnement par disjonction des cas ; raisonnement par équivalence.	• Calcul numérique. • équations et inéquations. • Les suites numériques. • Les fonctions numériques, logarithmiques et exponentielles. • Les limites et la dérivation.

• ***Quelques motivations***

Les mathématiques est un langage pour s'exprimer rigoureusement, qui rend les calculs exacts et véritables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer.

I Proposition

1 Activité

Activité

Mettre une croix ($\times$) dans la case qui convient :

Textes mathématiques	Vrai	Faux	On ne peut pas décider sa vérité
"15×2"			
"$-4 \geqslant 12$"			
"$\sqrt{9} = 3$"			
"7 est un nombre pair"			
"$\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$"			

2 Définition

Définition

Une proposition est un texte mathématique qui a un sens et qui soit vrai soit faux pas les deux en même temps.

3 Exemples

- La proposition : " $3 \times 2 = 16$ " est *fausse*
- La proposition : " Deux droites strictement parallèles se coupent" est *fausse*
- La proposition : " $5 > 3$ " est *vraie*

Today better than yesterday, tomorrow better than today

II Les quantificateurs

1 Le quantificateur existentiel "∃"

a Définition

Définition

La proposition "$(\exists x \in E) : P(x)$ " signifie qu'il existe au moins un élément $x \in E$ qui vérifie $P(x)$. et qu'elle soit vrai lorsque on trouve au moins un élément x de E qui vérifie $P(x)$.

Le symbole $\exists$ est appelé "**le quantificateur existentiel**" et se lit "**il existe au moins**".

b Remarque

La proposition "$(\exists! x \in E) : P(x)$" signifie qu'il existe un seule élément x de E qui vérifie $P(x)$.

• Exemple

⊛ La proposition P_1 : "$(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x+1=0$" est vraie, (car l'élément $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ vérifie $2x+1=0$)

⊛ La proposition P_2 : "$(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2=-1$" est fausse, (car il n'existe pas d'élément de $\mathbb{R}$ qui vérifie $x^2=-1$)

⊛ La proposition P_3 : "$(\exists x \in \mathbb{N}) : n+1=0$" est fausse, (car il n'existe pas d'élément de $\mathbb{N}$ qui vérifie $n=-1$ $(-1 \notin \mathbb{N})$)

Exercice

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. Q_1 : "$(\exists \in \mathbb{R}) 4x-3=0$"
2. Q_2 : "$(\exists \in \mathbb{R}) x^2+x-2=0$"
3. Q_3 : "$(\exists \in \mathbb{R}) x^2-x+2=0$"
4. Q_4 : "$(\exists \in \mathbb{R}) 4x-16>0$"

2 Le quantificateur universel "∀"

a Définition

Définition

Soit "$(x \in E)$" une fonction propositionnelle $(E \neq \emptyset)$

La proposition "$(\forall x \in E) : P(x)$ " signifie que tout élément $x \in E$ vérifie $P(x)$. et qu'elle soit vrai lorsque pour tout x de E on a $P(x)$ est vraie.

Le symbole $\forall$ est appelé "**le quantificateur universel**" et se lit "**pour tout**" ou "**quel que soit**".

b Exemples

• Exemple

⊛ La proposition P_4 : "$(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x+1=0$" est fausse, (car l'élément $0 \in \mathbb{R}$ ne vérifie pas $2x+1=0$)

⊛ La proposition P_5 : "$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 0$" est vraie, (car pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$)

Exercice

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. Q_4 : "$(\forall \in \mathbb{R}) x^2+1 \geq 1$"
2. Q_5 : "$(\forall \in \mathbb{R}) x^2+x+2 > 0$"
3. Q_6 : "$(\forall \in \mathbb{R}) 4x+16 > 0$"

Exercice

1 Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs

- P : "pour tout entier naturel n le nombre $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel"
- Q : "il existe au moins deux entier relatif n et m tel que : $n-m=5$"

2 Déterminer la valeur de vérité des propositions P et Q.

III Opérations sur les propositions

1 La négation d'une proposition

a Définition

Définition

La négation d'une proposition P notée (non P) ou $(\neg P)$ ou $(\overline{P})$ est la proposition qui est vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie.

Table de vérité :

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

b Exemples

Exemple

• La négation de la proposition "$P : 1 > \sqrt{2}$" est "$\neg P : 1 \leq \sqrt{2}$" • La négation de la proposition "$Q : \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$" est "$\neg Q : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$" • La négation de la proposition "$R : (-2)^2 = -4$" est "$\neg R : (-2)^2 \neq -4$"

c Remarques

1. Pour déterminer la négation d'une proposition il faut déterminer la négation de Certains Symboles :

Lesymbole	$=$	$<$	$>$	$\in$	$\subset$	$\forall$
Langation	$\neq$	$\geq$	$\leq$	$\notin$	$\not\subset$	$\exists$

2. La négation de la proposition "$(\exists x \in E) : P(x)$" est "$(\forall x \in E) : \neg P(x)$".

La négation de la proposition "$(\forall x \in E : P(x)$" est "$(\exists x \in E) : \neg P(x)$".

3. Pour montrer que la proposition "$(\forall x \in E : P(x)$" est fausse, il suffit de montrer que sa négation "$(\exists x \in E) : \neg P(x)$" est vraie, et donc il suffit de donnée un exemple.

Exercice

Montrer que la proposition "$(\forall n \in \mathbb{N}) : \dfrac{n}{2} \in \mathbb{N}$" est fausse

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice

1 Déterminer la négation des proposition suivantes :

$P_1 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) : x \leq n$ $P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 2x+1=3$ $P_3 : \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$

$P_4 : \forall n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{Z}$ $P_5 : (\forall x \in \mathbb{R}) : 4x+16 \geq x$

2 Déterminer la valeur de vérité des propositions précédentes

2 Conjonction de deux proposition

a Activité

L'étudiant *Omar* enseigne à la fois L'arabe ; Le français et L'anglais.

Déterminer la valeur de vérité des proposition suivantes :

P_1 : "Omar enseigne l'arabe et le français"

P_2 : "Omar enseigne l'arabe et l'espagnol"

P_3 : "Omar enseigne l'espagnol et l'allemand"

b Définition

Définition

la conjonction de deux propositions notée ("P et Q") ou $(P \wedge Q)$ est une proposition qui est vraie si P et Q sont vraies, et qui est fausse sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

c Exemples

1 : la proposition " Deux droites strictement parallèles se coupent" et "$2 \in \mathbb{N}$" est une proposition fausse.

2. la proposition "$\sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$" et "$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$" est fausse.

3. la proposition "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$" et "3 est impair" est une proposition vraie.

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Remarque

Les propositions (P et Q) et (Q et P) ont la même vérité. On dit que la conjonction est *commutative*.

3 La disjonction de deux propositions

a Activité

L'étudiant *Omar* enseigne à la fois L'arabe ; Le français et L'anglais.

Déterminer la valeur de vérité des proposition suivantes :

P_1 : "Omar enseigne l'arabe ou le français".

P_2 : "Omar enseigne l'arabe ou l'espagnol".

P_3 : "Omar enseigne l'espagnol ou l'allemand"

b Définition

Définition

la disjonction de deux propositions notée ("P ou Q") ou ($P \vee Q$) est une proposition qui est fausse si P et Q sont fausses, et qui est vraie sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

c Exemples

1 : la proposition " Deux droites strictement parallèles se coupent" ou "$2 \in \mathbb{N}$" est une proposition vraie.

2. la proposition "$\sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$" ou "$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$" est une proposition vraie.

3. la proposition "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$" ou "$\mathbb{R} \subset \mathbb{N}$" est une proposition fausse.

Remarque

Les propositions (P ou Q) et (Q ou P) ont la même vérité. On dit que la conjonction est *commutative*.

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

La négation de la proposition (P ou Q) est la proposition ($\neg P$ et $\neg Q$).

La négation de la proposition (P et Q) est la proposition ($\neg P$ ou $\neg Q$).

4 Implication de deux propositions

a Définition

Définition

L'implication de la proposition P vers la proposition Q est la proposition notée $P \Rightarrow Q$ qui est fausse si P est vraie et Q est fausse et qui est vraie sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

b Exemples

1. "$9 > 4 \Rightarrow 9 > 2$" est une proposition vraie.

2. "$\sqrt{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$"est une proposition vraie.

3. "3 est un nombre impair $\Rightarrow$ 4 est un nombre impair" est une proposition fausse. 4. "4 est un nombre impair $\Rightarrow$ 3 est un nombre impair" est une proposition vraie.

c Remarques

1. La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit " P implique Q " (ou si P alors Q).

2. les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ n'ont pas le même sens.

3. L'implication $Q \Rightarrow P$ est l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$.

4. Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, on commence de la proposition P et il faut trouver la proposition Q. (on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie).

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^2 + c$, $(a \neq 0)$.

Considérons les deux propositions :

P : "l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions". Q : "$ac < 0$".

Montrer que : $P \Rightarrow Q$.

5 Équivalence de deux propositions

a Définition

Définition

léquivalence de deux propositions P et Q est une proposition notée $(P \Leftrightarrow Q)$ qui est vraie si P et Q ont la même vérité et qui est fausse dans les cas contraires.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$P \Leftrightarrow Q$ signifie que "$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$"

b Exemples

"$|2-\pi| = \pi - 2 \Leftrightarrow \sqrt{2^2} = 2$" est une proposition vraie

"$1 + \sqrt{3}^2 = 4 \Leftrightarrow 12 = 2^2 \times 3^2$" est une proposition fausse

"$-1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -1 > 0$" est une proposition vraie

"$(\exists n \in \mathbb{Z}) : 2n - 1 = 0 \Leftrightarrow 2$ est un nombre impair" est une proposition fausse

c Remarques

1. $P \Leftrightarrow Q$ se lit (P équivaut à Q) ou (P si et seulement si : Q) ou (P si équivalant à Q).
2. $P \Leftrightarrow Q$ est la proposition ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$).
3. Les deux propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow P$ ont le même sens.
4. On général pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$ il suffi de montrer que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Today better than yesterday, tomorrow better than today

IV Raisonnements mathématiques

1 Raisonnements par équivalence

• Exemple

Montrer que :

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

2 Raisonnements par disjonction des cas

• Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x| + 5 = 3x$

3 Raisonnements par l'absurde

• Exemple

Montrer que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$

Today better than yesterday, tomorrow better than today