Chapitre

Limites et continuité

Rappel

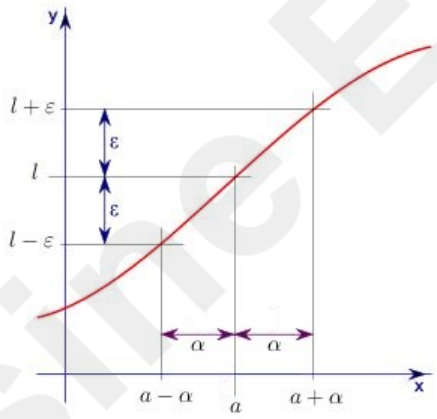
1 Limite d'une fonction en un point

Propriété

Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un réel a et l un réel. On dit que f tend vers l quand x tend vers a, ou que f a pour limite l en a si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \quad (0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$$

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$



• Exemple

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 3x+2$; En utilisant la définition montrons que $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 17$

2 Unicité de la limite

Propriété

Si une fonction f admet une limite en un point, alors elle est unique.

EXEMPLES

Supposons que f admet deux limites $l_1 \neq l_2$ en un point a ; soit $(\varepsilon > 0)$ alors

Yassine Elamri

$$(\exists \alpha_1 > 0) \quad (\forall x \in D_f) \quad 0 < |x-a| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x)-l_1| < \varepsilon$$
$$(\exists \alpha_2 > 0) \quad (\forall x \in D_f) \quad 0 < |x-a| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x)-l_2| < \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = \dfrac{|l_1-l_2|}{2}$
Soit $\alpha = inf(\alpha_1;\alpha_2)$, on a $(\forall x \in D_f) : 0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-l_1| < \varepsilon$ et $|f(x)-l_2| < \varepsilon$
et puisque $|l_1-l_2| = |(l_1-f(x))+(f(x)-l_2)|$
donc $|l_1-l_2| \leq |(f(x)-l_1)|+|(f(x)-l_2)| < \dfrac{|l_1-l_2|}{2} + \dfrac{|l_1-l_2|}{2}$
Alors $|l_1-l_2| < |l_1-l_2|$
ce qui est absurde
ainsi $l_1 = l_2$

3 Exercices :

Exercice

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos+1}{x-\pi}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-4}{x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3+2x^2-11x-12}{x^4-81}$; 7) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{2x^2+x}-5}$

9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\tan x$; 10) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x+1$

Exercice

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} + x$

calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

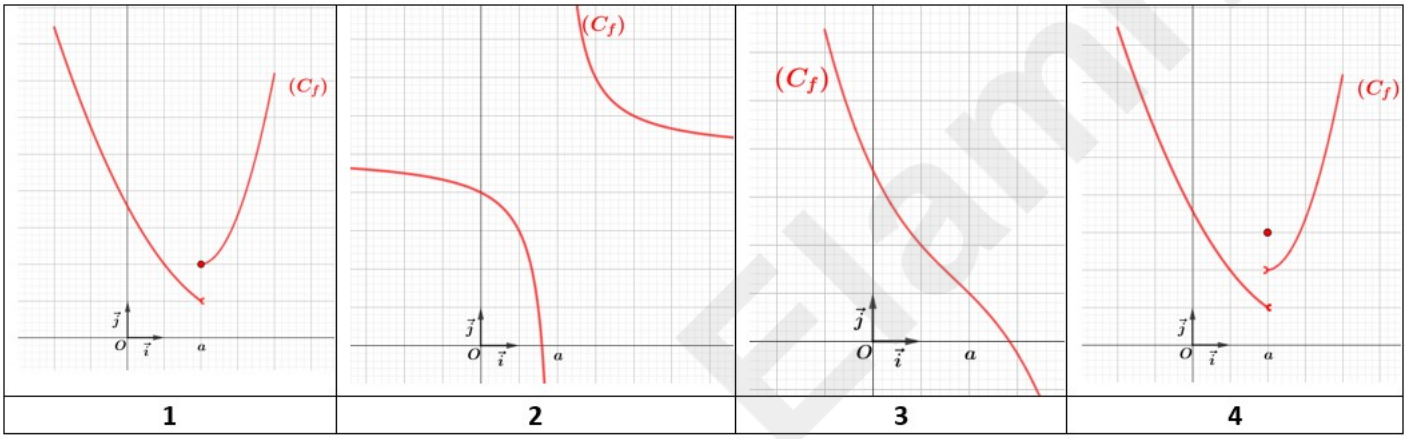
Yassine Elamri

II Continuité d'une fonction

1 Continuité en un point

Activité

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{I};\vec{J})$



1 Comparer $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ avec $f(a)$ (si elle existe)

2 Que constate-t-on pour (C_f) au point A d'abscisse a ?

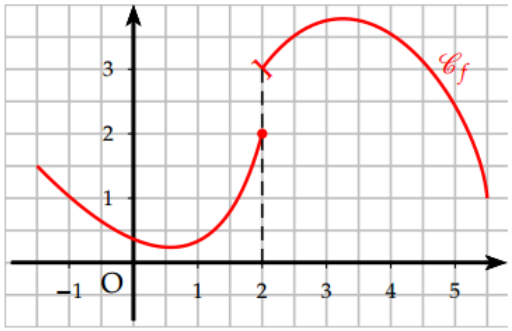
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
On dit que la fonction f est **continue au point** a si et seulement si $f(a)$ existe et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

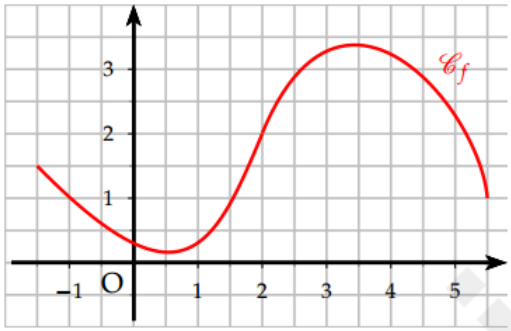
Remarque

• Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en un seul morceau.

Yassine Elamri



Fonction f discontinue en 2



Fonction f continue sur $[-1,5\,;5,5]$

• f est continue en x_0 si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

• Exemple

1 On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & si \quad x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

La fonction est-elle continue en 1 ?

2 Soit g une fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1-\cos x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ g(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Étudier la continuité de g en 0.

2 Continuité à droite, continuité à gauche

Activité

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-1;2]$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{7sin(a(x-1))}{x-1} & ;-1 \leq x < 1 \\ f(x) = 6x+a & ;1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

1 Calculer $f(1)$ et démontrer que f est continue à droite en 1.

2 Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 1.

Conclusion : Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0

Définition

▶ Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a;a+\alpha[$ $(\alpha > 0)$. On dit que la fonction f est **continue à droite en** a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Yassine Elamri

▶ Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a-\alpha;a]$ $(\alpha>0)$. On dit que la fonction f est **continue à gauche en** a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

Application

1 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (2-x)^2 & si \quad x\leq 1 \\ f(x) = x^3+x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$

Étudier la continuité de f à gauche et à droite en 1.

2 Soit g une fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = x^2+2x & ; \quad x\leq 1 \\ g(x) = \dfrac{a\sin(x-1)}{x-1} & ; \quad x>1 \end{cases}$

déterminer la valeur de a pour que g soit continue au point $x_0=0$.

3 prolongement par continuité

Activité

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x-5|-3}$

1 Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2 a Calculer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

b Soit g la fonction définie sur $D_f\cup\{2\}$ par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & si \quad x\in D_f \\ g(2) = -2 \end{cases}$

Montrer que g est continue en 2.

On dit que f admet un prolongement par continuité en 2 et que g est son prolongement par continuité en 2

Définition

Soit f une fonction non définie en a $(a\notin D_f)$, et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\in\mathbb{R}$.

la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & six\in D_f \\ g(a) = l \end{cases}$

est une fonction **continue** en a et est appelée **le prolongement par continuité** de f en a

Application

1 Montrons que la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{sinx}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0

2 Montrons que la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$ admet un prolongement par continuité en 1

Yassine Elamri

4 continuité sur un intervalle

Activité

Soit f une fonction définie sur $[0;\pi]$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x} & si \quad x \in]0;\pi] \\ f(0) = 0 \end{cases}$

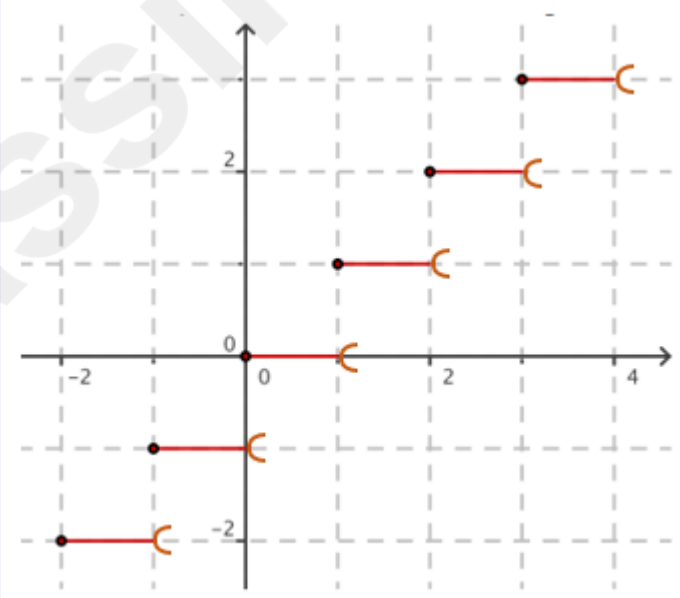
Montrer que f est continue sur $[0;\pi]$.

Définition

- Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I ssi elle est continue en tout point de I.
- Une fonction est continue sur un intervalle $]a;b[$ ssi elle est continue en tout point de $]a;b[$.
- Une fonction est continue sur un intervalle $[a;b]$ ssi elle est continue sur $]a;b[$, à droite en a et à gauche en b.
- De façon analogue, on définit la continuité de f sur les intervalles $[a;b[$, $]a;b]$, $[a;+\infty[$ et $]-\infty;b]$

Application

la fonction partie entière, notée $E(x)$ est définie par:pour tout réel x, il existe un entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. Alors $E(x) = n$.
On a $E(2.5) = 2$; $E(2) = 2$; $E(-2,5) = -3$; $E(-3) = -3$.
La représentation graphique de cette fonction est donnée ci-contre. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas continue en chaque entier relatif.
Pour tout n de $\mathbb{Z}$ on a $\lim\limits_{x \to n^-} E(x) = n-1$ et $\lim\limits_{x \to n^+} E(x) = n$
Puisque $\lim\limits_{x \to n^-} E(x) \neq \lim\limits_{x \to n^+} E(x)$ donc la fonction partie entière n'est continue en $n \in \mathbb{Z}$.



Yassine Elamri

Propriété

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$;
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition ;
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$;
- La fonction tangente est continue sur tout intervalle contenu dans son domaine de définition ;
- La fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

5 Opération sur les fonctions continues

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Les fonctions $f+g$, λf et $f.g$ sont continues en x_0 avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0 ;
- La fonction $|f|$ est continue en x_0 ;

Application

1 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{2x-1}$
Montrons que f est continue sur son domaine de définition.

2 Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{3-x}$
Montrons que g est continue sur $]-\infty;3]$.

6 Continuité et composition

a Continuité d'une fonction composée

Activité

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I,et g une fonction continue sur un intervalle ouvert J, tel que $f(I) \subset J$.
Montrons que $g \circ f$ est continue sur I.
Soit $x_0 \in I$, et montrons que $g \circ f$ est continue en x_0
Soit un réel $\varepsilon > 0$, on a g est continue en $f(x_0)$ donc

$$(\exists \alpha_1 > 0)(\forall x \in J) \quad |x - f(x_0)| < \alpha_1 \Rightarrow |g(x) - g(f(x_0))| < \varepsilon \tag{1.1}$$

On a f est continue en x_0 donc pour α_1

$$(\exists \alpha > 0)(\forall x \in I) \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha_1 \tag{1.2}$$

Donc d'après (1.1) et (1.2) on a :

Yassine Elamri

$$|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\alpha_1 \Rightarrow |g(f(x))-g(f(x_0))<\varepsilon$$

par conséquent :

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \alpha>0)(\forall x\in I) \quad |x-x_0|<\alpha \Rightarrow |g\circ f(x)-g\circ f(x_0)|<\varepsilon$$

Propriété

Soit $f: I\to\mathbb{R}$ et $g: J\to\mathbb{R}$, on suppose que $f(I)\subset J$. Si f est continue sur I et g continue est sur J alors $g\circ f$ est continue sur I.

Application

1 Montrer que la fonctions f définie par : $f(x)=\sin(x^2+3x-1)$ est continue sur $\mathbb{R}$

2 Étudier la continuité de la fonction g définie par : $g(x)=\cos\left(\dfrac{x^2+2}{x-1}\right)$.

Remarque

La réciproque de la propriété précédente n'est pas toujours vrai.

les fonction f et g définies par : $\begin{cases} f(x) = 2x+1 & six\neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ et $g(x)=4$

On a $\forall x\in\mathbb{R}\ g\circ f(x)=4$

$g\circ f$ est continue en 1 et f n'est pas continue en 1.

b la composée d'une fonction continue et d'une fonction qui admet une limite

Activité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre x_0 et g une fonction définie sur un intervalle J tq : $f(I)\subset J$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ avec g est continue en l.

Montrons que $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x)=g(l)$

- Soit h le prolongement par continuité de f en x_0

h est continue en x_0 donc $g\circ h$ est continue en x_0

$(g\circ f=g\circ h)$ alors : $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g\circ h(x)=g\circ h(x_0)=g(l)$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre x_0 et g une fonction définie sur un intervalle J tq : $f(I)\subset J$

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ et g est continue en l, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x)=g(l)$

Application

Calculer les limites suivantes :

Yassine Elamri

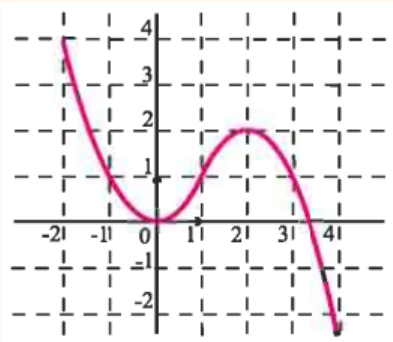
1 $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi \sin(x)}{2x}\right)$

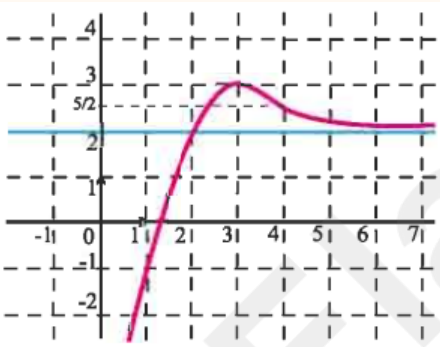
2 $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x+1}{2x-1}\right)$

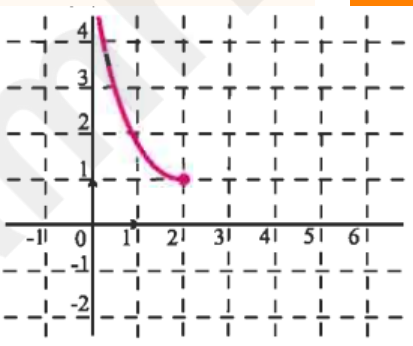
7 Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité

Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image $f(I)$ de l'intervalle I.





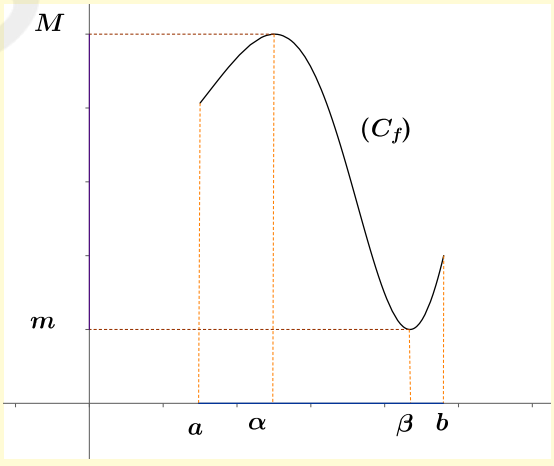


Propriété

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

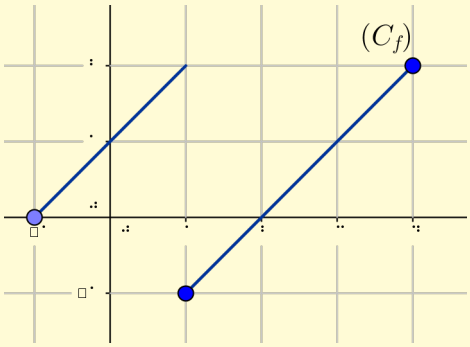
Remarque

1 Si f est continue sur $[a;b]$ alors $f[a;b] = [m;M]$ avec $M = sup_{x\in[a;b]}(f(x))$ et $m = min_{x\in[a;b]}(f(x))$



2 Soit f une fonction (C_f) sa représentation graphique

Yassine Ennri



$f([-1;4]=[1;2]$ même si f est discontinue en 1
(La continuité de la fonction est une condition suffisante mais pas nécessaire)

8 Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Le tableau suivant précise l'intervalle $J=f(I)$ dans chacun des cas possibles pour I. (a et b désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

	L'image de I par f est l'intervalle :	
Si $I=$	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim\limits_{x\to a} f(x)[$
$[a,b[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x),f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x),\lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x),\lim\limits_{x\to a} f(x)[$

Application

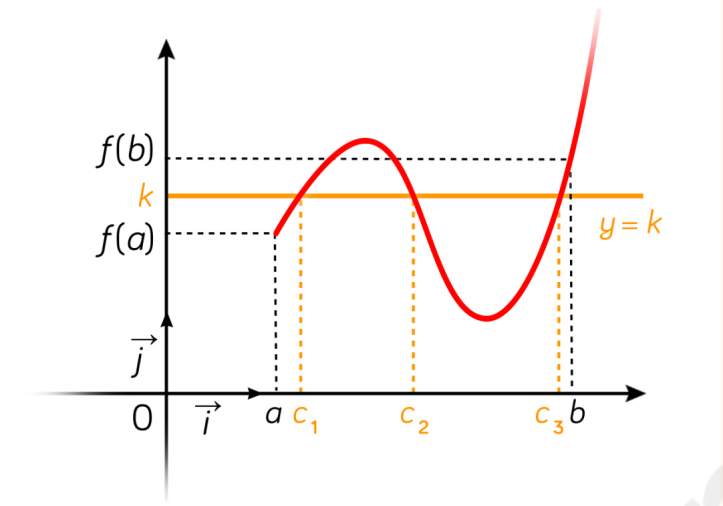
Soit f une fonction définie par : $f(x)=x^2-2x+3$
Déterminer les images des intervalles suivants par f : $I=]-\infty;0]$ et $J=[1;2]$

9 Théorème des valeurs intermédiaires

Activité

soit f une fonction continue sur $[a;b]$, donc il existe m et M de $\mathbb{R}$ $f\{[a;b]\}=[m;M]$
soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$; puisque $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à l'intervalle $[m;M]$;
donc $k\in[m;M]$
d'où $\exists$ c $\in[a;b]$ tq $f(c)=k$

Yassine Flamri



T **Théorème**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

■ **Résultats :**

- Si f est continue sur $[a;b]$ et $f(a)f(b)\leq 0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet **au moins** une solution dans $[a;b]$
- Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et $f(a)f(b)\leq 0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet **une unique** solution dans $[a;b]$

Application

1. Démontrer que l'équation suivante : $x^4+x^2+4x-1=0$ admet au moins une solution dans $[0;1]$
2. Démontrer que l'équation suivante : $x^3-6x^2+6=0$ admet une solution unique dans $[-2;0]$

10 Principe de la méthode de DICHOTOMIE

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires. L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dont on peut déterminer un encadrement par dichotomie.

■ **Principe de cette méthode :**

- On calcule m le centre de [a,b].
- Si f(m) et f(b) sont de même signe, c'est que la solution se trouve dans [a,m] : on affecte à b la valeur de m afin de pouvoir continuer le processus.
- Dans le cas contraire, la solution se trouve dans [m,b] : on affecte à a la valeur de m afin de pouvoir continuer le processus.
- On continue le processus jusqu'à obtenir un encadrement avec la précision voulue

Yassine Elamri

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$

1. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $0 < \alpha < 1$
2. Déterminons un encadrement de α de longueur $0,25$

III Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

1 Théorème des fonctions réciproques

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$

EXEMPLES

Puisque I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$. Donc : $\forall y \in f(I), \quad \exists x \in I : y = f(x)$

Soit a et b deux éléments distincts de I. Puisque f est strictement monotone sur I alors $f(a) > f(b)$ ou $f(a) < f(b)$, donc $f(a) \neq f(b)$. Alors pour tout $y \in f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I, et donc f est une bijection de I sur $f(I)$.

Activité

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [1;3]$ par : $f(x) = x^2 - 2x$

1. Déterminer l'intervalle J l'image de l'intervalle I par f.
2. Soit x un élément de l'intervalle J et y un élément de l'intervalle I
   Montrer que $f(y) = x \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{x+1}$

- La fonction f est continue et strictement croissante sur I ; On dit que f admet **une fonction réciproque**
- La fonction définie sur l'intervalle $J = f(I)$ par : $x \mapsto 1 + \sqrt{x+1}$ c'est la fonction réciproque de la fonction f, on la note f^{-1} ; et on a

$$(\forall x \in J); \quad f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$$

Remarque

- f une fonction définie sur un intervalle I tq : $\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & J = f(I) \\ & x & \longmapsto & f(x) = y \end{array}$

Yassine Elamri

- Si f admet une fonction réciproque f^{-1} alors : $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & J & \longrightarrow & I \\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y)=x \end{array}$
- $(\forall x\in I)(\forall y\in J)\quad (f(x)=y)\Leftrightarrow (f^{-1}(y)=x)$
- $(\forall x\in I)\quad f^{-1}\circ f(x)=x\quad$ et $\quad(\forall x\in J)\quad f\circ f^{-1}(x)=x$

Application

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

1. Montrer que f est une bijection de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
2. Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x\in J$.

2 Propriétés de la fonction réciproque

Activité

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

- La fonction réciproque $f^{-1}(x)$ est continue sur $f(I)$.
- Soit y_1 et y_2 deux éléments distincts de $f(I)$. $\exists(x_1,x_2)\in I^2\ /y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$
  Donc $x_1=f^{-1}(y_1)$ et $x_2=f^{-1}(y_2)$
  Alors : $\dfrac{f^{-1}(y_2)-f^{-1}(y_1)}{y_2-y_1}=\dfrac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}$
  Donc les taux de variation des fonctions f et f^{-1} ont le même signe d'où f et f^{-1} ont le même sens de variation.
- Soit C_f et $C_{f^{-1}}$ les graphes de f et f^{-1} respectivement dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit $M(x,y)$ un point du plan et $M'(y,x)$ son symétrique par rapport à la première bissectrice. On a :

$$M(x,y)\in C_f\Leftrightarrow y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\Leftrightarrow M'(y,x)\in C_{f^{-1}}$$

D'où C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Propriété

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variation que la fonction f.
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1} , dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la bissectrice (la droite d'équation $y=x$)

Yassine Elamri

IV Fonctions réciproques usuelles

1 Fonction Arctangente

Définition

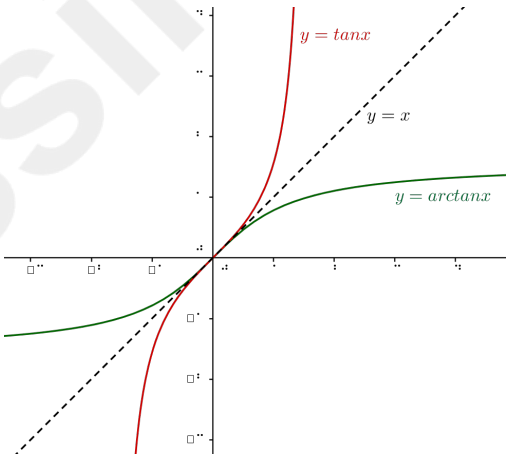
La fonction $x \mapsto \tan x$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée fonction **Arctangente** et la note **Arctan**.

Propriété

- La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On a de plus :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)(\arctan x = y \Leftrightarrow x = \tan y)$$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) : \tan(\arctan x) = x$
- $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) : \arctan(\tan x) = x$
- La fonction arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$: $(\arctan x = \arctan y \Leftrightarrow x = y)$ *et* $(\arctan x < \arctan y \Leftrightarrow x < y)$
- La fonction $x \mapsto \arctan x$ et impaire : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \arctan(-x) = -\arctan x$
- On a les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$



• Exemple

1 Calculer : $\arctan(-1)$; $\arctan(-\sqrt{3})$; $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\arctan\left(tan\frac{81\pi}{4}\right)$

2 Calculer les limites de la fonction f définie par : $f(x) = (x+1)\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ aux bornes de

Yassine Elamri

son domaine de définition.

2 Fonction racine $n^{ième}$

Activité

Soit n un entier naturel non nul
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x^n$
On a f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (restriction d'une fonction polynôme)
Et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) = nx^{n-1} \geq 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
Et puisque $f(\mathbb{R}^+) = f([0;+\infty[) = [f(0); \lim\limits_{x\to+\infty} x^n[= [0;+\infty[$
Alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Définition

Soit n un entier naturel non nul
La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa fonction réciproque est appelée **la fonction racine** $n^{ième}$ et on la note $\sqrt[n]{\ }$.
$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[n]{x}$ se lit racine $n^{ième}$ de x.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{+2} : \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x ; \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y ; \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x.$
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^4 - 16 = 0$; 2) $4x^6 + 1 = 0$; 3) $x^3 - 64 = 0$; 4) $1 + 8x^9 = 0$

Remarque

L'ensemble des solutions de l'équation $x^n = a$ tq : $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

	n pair	n impair
$a > 0$	S= $\{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	S= $\{\sqrt[n]{a}\}$
$a < 0$	S=$\emptyset$	S=$\{-\sqrt[n]{-a}\}$

Yassine Elamri

Propriété

soit x et y deux réels positifs, et p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, on a :

$\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$; $\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

$(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$; $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ (avec $x \neq 0$) ; $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ (avec $y \neq 0$)

Exercice

Simplifions le nombre $A = \dfrac{\sqrt[6]{343} \times \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{216} \times \sqrt[4]{7}}{\sqrt{\sqrt[4]{49}}}$

Remarque

Si $xy > 0$ on a $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{|x|}\sqrt[n]{|y|}$ et $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{|x|}}{\sqrt[n]{|y|}}$ avec $(y \neq 0)$

Application

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) : \sqrt[n]{x} \times \sqrt[p]{x} = \sqrt[np]{x^{n+p}}$

Propriété

Soit f une fonction **positive** sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$:

- Si f est continue sur I alors la fonction $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

Application

1. Étudions la continuité de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{\arctan x}$ sur $\mathbb{R}^+$
2. calculons la limite : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$

Exercice

soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x+56} - 4}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites de f en 8 et en $+\infty$.

Yassine Elamri

3 Puissances rationnelles d'un nombre strictement positif

Définition

Soit a un réel strictement positif et r un nombre rationnel. On pose $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre a^r est le nombre $\sqrt[n]{a^p}$. Ce nombre est appelé la puissance rationnelle de nombre a.

• Exemple

$5^{\frac{7}{2}} = \ldots\ldots\ldots$; $2^{-\frac{3}{5}} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$; $8^{\frac{1}{3}} = \ldots\ldots\ldots$

Remarque

- Si $r = 0$ on a : $a^r = \ldots\ldots$
- $\sqrt{a} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

Propriété

soit $r \in \mathbb{Q}$ et $r' \in \mathbb{Q}$ et a et b deux réels strictement positifs.

$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$; $(ab)^r = a^r.b^r$; $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$

$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$; $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

• Exemple

Simplifions le nombre $A = \dfrac{\sqrt[9]{125^2} \times \sqrt[4]{625} \times \sqrt{25^5}}{\sqrt[3]{5^{17}}}$

Exercice

1. Soit $x \in]0;1[$; montrer que $x^{\frac{6}{7}} > x$.
2. En déduire que $\forall x$ et y de $]0;+\infty[$ on a : $\sqrt[7]{x^6} + \sqrt[7]{y^6} > \sqrt[7]{(x+y)^6}$.
   ($0 < \frac{x}{x+y} < 1$ et $0 < \frac{y}{x+y} < 1$)

Yassine Hamri