# Limites des suites numériques



## Série d'exercices

### Exercice

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < u_n \leq 2$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante.
3. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique.
4. Déterminer $u_n$ en fonction de $n$
5. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

### Exercice

$(u_n)_n$ une suite telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 3}{4 - u_n} \end{cases}$ Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$;

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq u_n \leq 3$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_n$
3. a. Montrer que $(v_n)_n$ est géométrique.
   b. Calculer $u_n$ en fonction de $n$.
   c. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

### Exercice

Soit $(u_n)_n$ la suite telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 8}{u_n + 2} \end{cases}$$

Yassine Elamri

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 < u_n < 4$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_n$.
3. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on pose
   $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$ ; Prouver que : $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
4. Déterminer $v_n$ en fonction de $n$.
5. Déduire que :
   $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{4 \times 3^n + 2^{n+1}}{3^n + 2^n}$.
6. En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

## Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{cases}$

1. a. Calculer $u_1$.
   b. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - 4 = \dfrac{4(u_n - 4)}{u_n + 2}$ et $u_{n+1} - 2 = \dfrac{6(u_n - 2)}{u_n + 2}$.
   c. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 2 < u_n < 4$
2. a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   b. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 3 \leq u_n < 4$.
3. a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$.
   b. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < 4 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.
   c. En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Yassine Elamri