Arithmétique dans $\mathbb{N}$

I Ensemble des nombres entiers naturels

Activité

Parmi les nombres suivants :0 ,8 , $\sqrt{2}$, $\sqrt{25}$, $\frac{12}{3}$. Préciser ceux qui sont des nombres entiers naturels.

Définition

1. Les nombres entiers naturels forment un ensemble qu'on note tels que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
2. Les nombres entiers naturels non nuls forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}^*$ tels que $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

• Exemple

1. 3 est un entier naturel, on dit que 3 appartient à l'ensemble et on écrit $3 \in \mathbb{N}$.
2. -5 n'est pas un entier naturel, on dit que 5 n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{N}$on écrit $-5 \notin \mathbb{N}$
3. 4 est un entier naturel non nul, on dit que 4 est appartient à $\mathbb{N}^*$, on écrit $4 \in \mathbb{N}^*$

Remarque

1. L'ensemble des nombres entiers naturels est infini, signifie que, si n est un entier naturel alors son successeur $n+1$ est aussi un nombre entier naturel
2. Le symbole $\in$ se lit ń appartient à ż
3. Le symbole $\notin$ se lit ń n'appartient à ż

Application

Compléter par $\in$ ou $\notin$:

13...$\mathbb{N}$; -1....$\mathbb{N}$; $\sqrt{12}$.....$\mathbb{N}$; 0.....$\mathbb{N}^*$; $\frac{\pi}{3}$.....$\mathbb{N}$

$\frac{18}{9}$...$\mathbb{N}$; $-\left(\frac{32}{-16}\right)$....$\mathbb{N}$; $\sqrt{25}$.....$\mathbb{N}$; 0.....$\mathbb{N}^*$; $\frac{\pi}{2}$.....$\mathbb{N}$

Yassine Elamri

II Divisibilité dans N

1 Nombres pairs Nombres impairs

Activité

1. Parmi les nombres suivants, Déterminer les multiple du nombre 2 : 8 , 15 , 16 , 33 , 138
2. Montrer que pour tout n on a $n \times (n+1)$ est nombre divisible par 2
3. pour tout n de N , montrer parmi les nombre suivants ceux qui sont les multiple de 2 : 2^2+1 , $2n+8$, $4n^2+1$

Définition

Soit a un nombre entier naturel.

1. On dit que a est un nombre pair s'il existe un nombre entier naturel k tel que : $a = 2k$
2. On dit que a est un nombre impair s'il existe un nombre entier naturel k tel que : $a = 2k+1$

• Exemple

1. On a : $144 = 272$, donc 144 est un nombre pair.
2. On a : $161 = 280+1$, donc 161 est un nombre impair.

2 Opérations sur les nombres pairs et les nombres impairs :

Propriété

Soient a et b deux nombres entiers naturels on a :

a	b	$a+b$	$a-b(a>b)$	$a \times b$
Pair	Pair	Pair	Pair	Pair
Pair	Impair	Impair	Impair	Pair
Impair	Pair	Impair	Impair	Pair
Impair	Impair	Pair	Pair	Impair

EXEMPLES

Supposons que a et b soient tous deux pairs. Cela signifie qu'il existe des entiers k et m tels que $a = 2k$ et $b = 2m$.
Alors, $a+b = 2k+2m = 2(k+m)$.
Comme $k+m$ est également un entier, $a+b$ est divisible par 2 et donc pair.
Ainsi, si a est pair et b est pair, alors $a+b$ est également pair.

Même démarche pour les autres cas.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

1 Étudier la parité des nombres suivants : $1359+59321$; $978^2 65^2$; 732753

2 Soit n un entier naturel ; étudier la parité des nombres suivants : $2n+3$, $1+(n+1)^2+(n+2)^2$

T **Théorème**

Le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre pair.

EXEMPLES

Soient n et $n+1$ deux entiers naturels consécutifs.
Nous allons effectuer une preuve par disjonction des cas en fonction de la parité de n.
Cas 1 : n est pair.
Si n est pair, alors $n+1$ est impair. Un nombre pair multiplié par un nombre impair donne un produit pair. Ainsi, $n\cdot(n+1)$ est pair.
Cas 2 : n est impair.
Si n est impair, alors $n+1$ est pair. Un nombre impair multiplié par un nombre pair donne un produit pair. Donc, $n\cdot(n+1)$ est pair.
En examinant les deux cas possibles, nous constatons que dans chaque cas, le produit $n\cdot(n+1)$ est pair.
Par conséquent, dans tous les cas, le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre pair.

3 Multiple et diviseur d'un nombre entier naturel

Activité

1 Parmi les nombres suivants , reconnaitre les multiple de 3 : 78 , 34×6 , 104 ,$102+39$

2 si m et n sont deux entiers naturels vérifiant $m=7n$ que peut-on déduire ?

Définition

Soient a et b deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel k tel que $a=b.k$.alors :
a : s'appelle le multiple de b
b : s'appelle le diviseur de a
k : s'appelle le rapport de a par b

• Exemple

$30=2\times 15$: donc 30 : multiple de 15 ; et 15 : diviseur de 30 ; et 2 : Le rapport de 30 par 15

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Remarque

1. 0 est un multiple de tous les nombres entiers naturels.
2. 1 est un diviseur de tous les nombres entiers naturels.

Application

1. Déterminer les diviseurs de 36 et 82
2. Déterminer les multiples de 3 inférieurs ou égal à 50.

4 Critères de divisibilité par 2,3,4,5 et 9

Propriété

Soit a un entier naturel. On dit que n est divisible par :

1. 2 si son chiffre des unités est :0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8
2. 5 si son chiffre des unités est :0 ou 5
3. 3 ou 9 si la somme de ses chiffres forme un multiple de 3 ou 9.
4. 4 si son chiffre des unités et son chiffre des dizaines forment un multiple de 4.

• Exemple

1. 4725 : divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.
2. 4725 : divisible par 3 et par 9 car la somme de ses chiffres qui est$4+7+2+5=18$ est un multiple de 3 et de 9.
3. 1628 : divisible par 4 car 28 est un multiple de 4.
4. 1628 divisible par 2 car son chiffre des unités est 8.

Application

Étudier la divisibilité de 3611790 par 2, 3, 4, 5 et 9

III Nombres premiers

Activité

Déterminer les diviseurs de 2 , 3 ,5 et 17. Que remarquez-vous ?

Définition

Un entier naturel supérieur ou égal à 2 est dite premier sil possède deux diviseurs 1 et lui-même.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Parmi les nombres suivants ; déterminer ceux qui sont des nombres premiers : 37 ;45 ;67 ;73 ;87

Remarque

1. 1 n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur.
2. 2 le seul nombre pair qui est premier.
3. Pour étudier la primalité d'un nombre entier naturel n ,on cherche tous les nombres premiers p qui vérifient $p \leq \sqrt{n}$. Si n est divisible par l'un de ces nombres alors n n'est pas un nombre premier sinon n est premier

• Exemple

Le nombre 37 est-il premier ?
On a $\sqrt{37} = 6,08$ et les nombres premiers inférieur ou égal à $\sqrt{37}$ sont 2, 3 et 5
Or 37 n'est pas divisible par 2 ; 3 et 5 ; alors 37 est un nombre premier.

Application

Étudier la primalité des nombres suivants : 101 ; 137 ; 1563

IV PGCD PPCM

1 Décomposition en produit de facteurs premiers.

T **Théorème**

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en produit de facteurs premiers

• Exemple

1. $30 = 2 \times 5 \times 3$ est une décomposition de 30 en produit de facteurs premiers
2.

Facteur premier	Division	Décomposition partielle
3	$825 \div 3 = 275$	3×275
5	$275 \div 5 = 55$	$3 \times 5 \times 55$
11	$55 \div 11 = 5$	$3 \times 5^2 \times 11$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 PGCD

Activité

1. Déterminer tous les diviseurs du nombre 12
2. Déterminer tous les diviseurs du nombre 18
3. Déterminer le plus grand diviseur commun entre 12 et 18
4. Refaire la même procédure pour 102 et 45

Définition

Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls.
Le plus grand commun diviseur de a et b s'appelle me PGCD de a et b et note $PGCD(a,b)$ ou $a \wedge b$

Remarque

Comme 1 est un diviseur de tous nombre a et b de ; alors $PGCD(a,b) \geq 1$

• Exemple

1. On a $D(27) = \{1;3;9;27\}$ et $D(81) = \{1;3;9;27;81\}$
   Alors les diviseurs communs à 27 et 81 sont : 1, 3, 9, 27.
   D'où $PGCD(27,81) = 27$
2. On a $D(18) = \{1;2;3;6;9;18\}$ et $D(105) = \{1;3;5;7;15;21;35;105\}$
   Alors les diviseurs communs à 18 et 105 sont : 1, 3.
   D'où $PGCD(18,105) = 3$

Application

Déterminer les diviseurs de 36 et 84 puis déduire $PGCD(36,84)$

T **Théorème**

Soit $a \in \mathbb{N}$

1. $a \wedge a = a$
2. $a \wedge 1 = 1$
3. $a \wedge 0 = a$
4. Si un entier naturel b divise a, alors $a \wedge b = b$.

T **Théorème**

Soient a et b deux nombres entiers naturels .
Le $PGCD(a,b)$ est le produit de facteurs premiers communs apparaissent à la fois dans la décomposition de a et b et affectés à une petite puissance

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

$a = 120$ et $b = 132$ on a :
$132 = 2^2 \times 3 \times 11$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$
par conséquent $PGCD(132,120) = 2^3 \times 3 = 12$

3 Deux nombres entiers naturels premiers entre eux

T **Théorème**

Soient a et b deux nombres entiers naturels .
On dit que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $PGCD(a,b) = 1$

Application

Montrer que 37 et 8 sont premiers entre eux.

4 PPCM

Activité

1. Déterminer les cinq premier multiples du nombre 6
2. Déterminer les cinq premier multiples du nombre 8
3. Déterminer le plus petite multiple commun entre 6 et 8
4. Refaire la même procédure pour 10 et 45

Définition

Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls.
Le plus petit commun multiple non nul de a et b s'appelle le PPCM de a et b et se note $PPCM(a,b)$ ou $a \vee b$

• Exemple

On a $M(7) = \{0,7,14,21,28,..\}$ et $M(3) = \{0,3,6,9,12,15,18,21,..\}$ Donc $PPCM(7,3) = 21$

Application

Déterminer $PPCM(12,15)$

T **Théorème**

Soients a et b deux nombres entiers naturels .
Le $PPCM(a,b)$ est le produit de facteurs premiers communs et non communs apparaissent dans la décomposition de a et b et affectés à une grande puissance.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Décomposer 45 et 120 en produit de facteurs premiers, puis déduire $PPCM(120,45)$

Remarque

5 Relation entre PGCD et PPCM

T **Théorème**

Soit a et b deux entiers naturels, on a :

$$PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = a \times b$$

Remarque

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Déterminons $PGCD(a,b)$ sachant que $ab = 180$ et $PPCM(a,b) = 60$

Yassine Elamri