Limite et continuité

I RAPPELS

1 Les opérations sur les limites

Limite de la somme

Soit $(l,l') \in \mathbb{R}^2$

$\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

Limite des produit

Soit $(l,l') \in \mathbb{R}^2$

$\lim f$	l	$l>0$ où $+\infty$		$l<0$ où $-\infty$		0	
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$F.I$

Limite des inverses

Soit $l \in \mathbb{R}^*$

$\lim f$	l	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Limite des quotients

Soit $(l,l') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$\lim f$	l	l'	l'	$l>0$ où $+\infty$		$l<0$ où $-\infty$		$+\infty$		$-\infty$		∞	0
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	∞	0
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$F.I$

Propriété

Soient f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 et $l \in \mathbb{R}$

- Si $|f(x)-l| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$
- Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$
- $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ où $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -l$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $f(x) \geq 0$ alors $l \geq 0$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ et $f(x) \geq g(x)$ alors $l \geq l'$

Yassine Elamri

Exercice

Exercice

https://steinmath.com

https://steinmath.com better than yesterday, tomorrow better than today

II Continuité d'une fonction numérique

1 Continuité d'une fonction en un point

Activité

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1} & ,x\neq 1 \\ f(1)=-1 \end{cases}$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2 Comparer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $f(1)$

Définition 1.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre x_0 .

On dit que la fonction f est continue au point x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

On dit que la fonction f est discontinue au point x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

Exemple

1 On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^3+2x^2-2x-1}{x^2-1}, & x\neq 1 \text{ et } x\neq -1 \\ f(1)=\frac{5}{2} \end{cases}$

Étudions la continuité de la fonction f au point $x_0=1$

Calculons $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-2x-1}{x^2-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+3x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+1}{x+1} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Donc f est continue au point $x_0=1$

2 On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x)=\frac{\sqrt{x+1}-x-1}{x}, & x\neq 1 \\ g(1)=\frac{1}{2} \end{cases}$

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Étudions la continuité de la fonction g au point $x_0 = 0$

Calculons $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 1} g(x) &= \frac{\sqrt{x+1}-x-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} - 1\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x+1-1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)} - 1\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} - 1\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} - 1\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(1)$.

Donc f est discontinue au point $x_0 = 1$

Application

1 Déterminer la valeur de α pour laquelle la fonction g soit continue au point x_0

a $\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}, & x \neq 1 \\ g(1) = \alpha \end{cases}$; $x_0 = 1$

b $\begin{cases} g(x) = \frac{2\tan(x)+\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ g(0) = \alpha \end{cases}$; $x_0 = 0$

2 Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction h soit continue au point x_0

a $\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{2x+2}-x^2-a}{x-1}, & x \neq 1 \\ h(1) = b-3a \end{cases}$; $x_0 = 1$

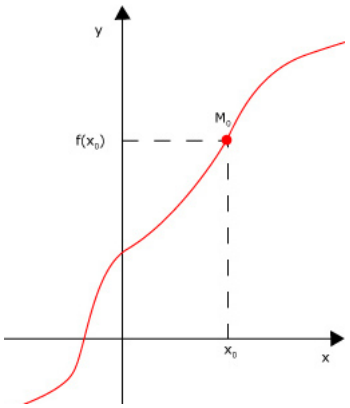
b $\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{\cos(x)+3}-2(x-a)}{x}, & x \neq 1 \\ h(1) = b^2-a \end{cases}$; $x_0 = 0$

c $\begin{cases} h(x) = \frac{-2(x-a)^2}{+}3x-a+3x, & x \neq 0 \\ h(0) = b^2+3b-4 \end{cases}$; $x_0 = 0$

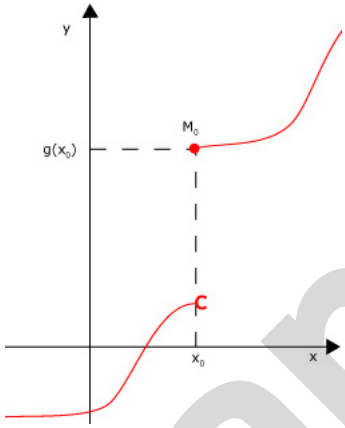
Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

a Interprétation graphique



f es continue au point x_0, signifie que la courbe représentatif de la fonction f



g es discontinue au point x_0, signifie que la courbe représentatif de la fonction g

b Continuité à droite - Continuité à gauche

Définition 1.2

1 Soit f une fonction définie sur l'intervalle de la forme $]x_0, x_0+r[$ avec $(r>0)$
On dit que la fonction f est continue à droite de x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

2 Soit f une fonction définie sur l'intervalle de la forme $]x_0-r, x_0[$ avec $(r>0)$
On dit que la fonction f est continue à gauche de x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Exemple

1 Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} + \quad ; x > -2 \\ f(-2) = 2 \end{cases}$

Étudions la continuité de la fonction f à droite de $x_0 = -$, calculons $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to(-2)^+} f(x) &= \lim_{x\to(-2)^+} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} + 2 \\ &= \lim_{x\to(-2)^+} \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}\times\sqrt{x+2}} + 2 \\ &= \lim_{x\to(-2)^+} \frac{(x+2))\sqrt{x+2}}{x+2} + 2 \\ &= \lim_{x\to(-2)^+} \sqrt{x+2} + 2 \\ &= 2 = f(-2) \end{aligned}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Comme $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = f(-2)$, alors f est continue à droite de -2

2 On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^3-3x+2}{\sqrt{1-x}} + & ;x<1 \\ f(x) = \sqrt{x-1}+x-1 & ;x\geq 1 \end{cases}$

Étudions la continuité de la fonction g à gauche de $x_0 = 1$, calculons $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^-} g(x) &= \lim_{x\to1^-} \frac{x^3-3x+2}{\sqrt{1-x}} \\
&= \lim_{x\to1^-} \frac{(x^3-3x+2)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\times\sqrt{1-x}} \\
&= \lim_{x\to1^-} \frac{(x^3-3x+2)\sqrt{1-x}}{1-x} \\
&= \lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)^2(x+2)\sqrt{1-x}}{1-x} \\
&= \lim_{x\to1^-} -\frac{(x-1)^2(x+2)\sqrt{1-x}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to1^-} -(x-1)^2(x+2)\sqrt{1-x} \\
&= 0 = f(1)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = f(1)$, alors g est continue à gauche de 1

Théorème

Une fonction numérique est continue au point x_0 si elle est continue à droite et à gauche au point x_0

(f est continue au point x_0) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Application

Étudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche de x_0

1 $(x_0 = 2)$ $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2} & ;x>2 \\ f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} & ;x<2 \\ f(2) = -\frac{9}{4} \end{cases}$

2 $(x_0 = 4)$ $\begin{cases} g(x) = \frac{16-x^2}{|x-4|} & ;x\neq 4 \\ f(4) = 8 \end{cases}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 $(x_0 = 1)$ $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+2x^2-2x-1}{x-1} - 1 & ;x > 1 \\ f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} & ;x < 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$

2 Les opérations sur les fonctions continues

a Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition 1.3 Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle I et $[a,b] \subset I$ (a et b deux réels $a < b$)

- On dit que f est continue sur $]a,b[$, si elle est continue en tout point de $]a,b[$
- On dit que f est continue sur $[a,b[$, si elle est continue sur $]a,b[$ et à droite de a
- On dit que f est continue sur $]a,b]$, si elle est continue sur $]a,b[$ et à gauche de b
- On dit que f est continue sur $[a,b]$, si elle est continue sur $]a,b[$ et à droite de a et à gauche de b

Remarque

- Si f est continue sur $[a,b]$, et sur $[b,c]$ alors elle est continue sur $[a,c]$
- Généralement : si f est continue sur I et sur J et $I \cap J \neq \varnothing$, alors f est continue sur $I \cup J$

b Les opérations sur les fonctions continues

Propriété

1 Si f et g deux fonctions continue en a alors :
- $f+g$
- $f \times g$
- $|f|$

Sont continue en a

2 Si f et g deux fonctions continues en a et $g(a) \neq 0$ alors :
- $\frac{1}{g}$
- $\frac{f}{g}$

Sont continue en a

3 si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors : la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Remarque

la propriété précédente reste vraie soit à droite de a, à gauche de a où sur un intervalle I (En tenant compte des conditions)

Résultat :

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- La fonction $x \to \tan(x)$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$; avec $k \in \mathbb{Z}$

III Image d'un intervalle par une fonction continue

1 Image d'un segment (intervalle fermé)

Théorème

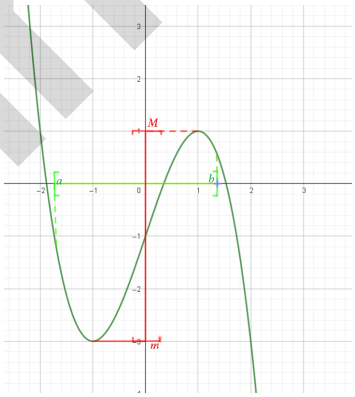
L'image d'un segment $[a,b]$ par une fonction continue est le segment $[m,M]$ où : $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

La courbe ci-contre est

la courbe de la fonction

$f(x) = -x^3 + 3x - 1$

$f([a,b]) = [m,M]$



Cas particulier :

- Si f est continue croissante sur $[a,b]$ alors : $f([a,b]) = [f(a),f(b)]$
- Si f est continue décroissante sur $[a,b]$ alors : $f([a,b]) = [f(b),f(a)]$

2 Image d'un intervalle

a Théorème général

Théorème

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Remarque

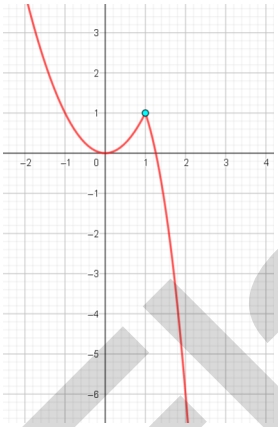
l'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme

Dans le cas de la courbe ci-contre

$f(]0,2]) = [-6,1]$

- $]0,2]$ est un intervalle semi-ouvert
- $[-6,1]$ est un intervalle fermé

De même on a : $f(]-1,1]) = [0,1]$



b cas d'une fonction strictement monotone

L'intervalle I	$f(I)$: f strictement croissante	$f(I)$: f strictement croissante
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,b[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,+\infty$	$[f(a),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty[} f(x),f(a)]$
$]-\infty,b[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)]$
$]-\infty,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Remarque

Si f n'est pas strictement monotone sur I, on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant l'intervalle I en intervalle où f est strictement monotone et on utilise la propriété $f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)$

Application

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$
   - a. Dresser le tableau de variations de la fonction f
   - b. Déterminer les images des intervalles suivants : $]-1,0]$; $[1,2]$; $[4,5[$; $[-3,+\infty[$
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{a}\right\}$ par : $g(x) = \frac{-2ax-1}{ax+1}$;

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

avec $(a \in \mathbb{R}^*)$

a Étudier les variations de g selon les valeurs de a

b On pose $a > 1$. Déterminer les images des intervalles suivants : $\left[-a-2, -a-\frac{1}{a}\right]$; $\left]\frac{1}{a}, a^2\right]$ et $[a, +\infty[$

IV Composition de deux fonctions

1 Continuité de la composition de deux fonctions

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction définie sur l'intervalle $f(I)$ et x_0 un élément de I

- Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0
- Si f est continue sur I et g continue sur $f(I)$ alors gof est continue sur I

EXEMPLE

1 La fonction $x \to \sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$ car :

- $u : x \to \frac{1}{x^2-1}$ est continue sur $]1, +\infty[$
- $v : x \to \sqrt{x}$ est continue sur $u(]1, +\infty[) = \mathbb{R}^+$

2 $x \to x^4 + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule sur $\mathbb{R}$ donc $x \to \frac{1}{x^4+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

3 La fonction $x \to \cos\left(\frac{1}{x^4+2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car :

- $x \to x^4 + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule sur $\mathbb{R}$ donc $x \to \frac{1}{x^4+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \to \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

4 Les fonctions $x \to \sqrt{x^2-4x+9}$; $x \to \sin\left(\frac{x^3+2x-1}{x^2+1}\right)$; $x \to \sqrt{\frac{1}{x^2-x+1}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$

2 Limite de gof

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert pointé de centre x_0 et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Si g une fonction continue sur l alors $\lim\limits_{x \to x_0} (gof)(x) = g(l)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\pi \frac{\sin(4x)}{3x}\right)$

2 $\lim\limits_{x\to x_0} \sin\left(\pi x\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\right)$

V Théorème des valeurs intermédiaires

1 Cas général

Théorème

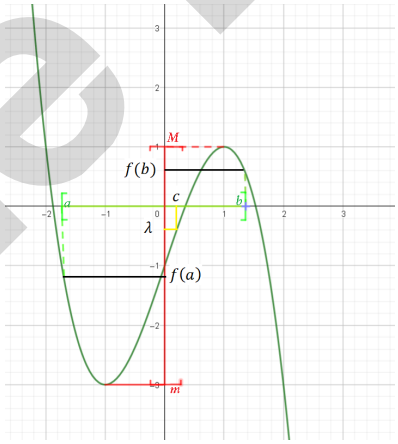
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$
Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$
En d'autre termes : l'équation $f(x)=\lambda$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a,b]$ pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I tel que $a<b$

Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Donc $\lambda \in f([a,b])$

Donc λ admet au moins un antécédent c dans l'intervalle $[a,b]$



D'où pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$
Si $f(a)\times f(b)<0$ alors il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c)=0$

2 Cas f strictement monotone

Théorème

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a,b]$
Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Corollaire

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a,b]$
Si $f(a)\times f(b)<0$ alors il existe un et un seul c dans $[a,b]$ tel que $f(c)=0$

EXEMPLE

Montrons que l'équation $x^3+2x=1$ admet une racine unique dans $\alpha\in\mathbb{R}$, puis vérifier que $\alpha\in[0,1]$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+2x-1$

- f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,f'(x)=3x^2+2$
  $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,f'(x)>0$ don f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $0\in f(\mathbb{R})$ car :
  $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$
  $f(\mathbb{R})=]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[=\mathbb{R}$ (f es strictement croissante)

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in\mathbb{R}$

$f(x)=0\Leftrightarrow x^3+2x-1=0\Leftrightarrow x^3+2x=1$

Donc : l'équation $x^3+2x=1$ admet une racine unique dans $\alpha\in\mathbb{R}$

Comme $\begin{cases}f(0)=-1\\ f(\alpha)=0\\ f(1)=2\end{cases}$ donc : $f(0)<f(\alpha)<f(1)$

Et puisque f est une fonction strictement croissante alors $0<\alpha<1$

Application

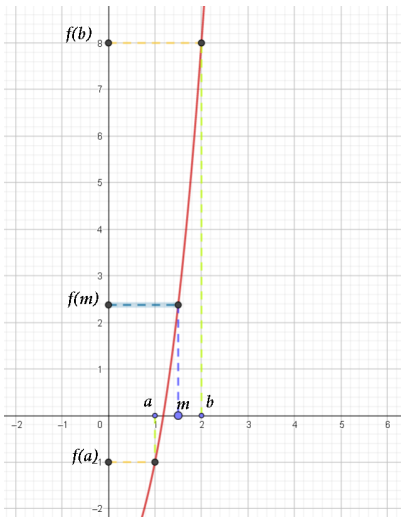
1. Montrer que : $\exists!c\in\left[-\frac{1}{2},0\right]\,/\,\sqrt{c+1}=\frac{-2c}{c+1}$
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $(\forall x\in\mathbb{R})\ ((f(x))^2=1$
   Démontrer que $f=1$ ou $f=-1$
3. soient g et φ deux fonctions définie sur$[0,1]$ telle que $\varphi(0)=\varphi(1)$ et $g(x)=\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right)-\varphi(x)$.
   Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$
4. Soit ϕ une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^*$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\phi(x)}{x}<1$
   Montrer que l'équation $\phi(x)=x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^*$

Yassine Elamri

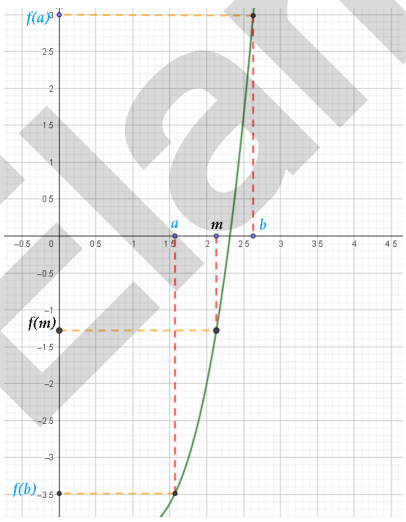
Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Principe de la méthode de dichotomie

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ telle que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $[a,b]$
Pour déterminer un encadrement du nombre α, on démarre donc en ayant localisé la racine α entre a et b $(a<\alpha<b)$; et on sait par exemple que sur cet intervalle , la fonction f est continue, strictement croissante
On calcule alors le centre m du segment $[a,b]$ $(m=\frac{a+b}{2})$, puis son image par la fonction f : $f(m)$ et on la compare à 0
Deux cas peuvent alors se produire :



Cas où $f(m)>0$
On a alors $a<\alpha<m$. On reprend la bissection de l'intervalle en posant $a=a$ et $b=m$
puis en continue comme précédemment



Cas où $f(m)<0$
Ona alors $m<\alpha<b$. On reprend la bissection de l'intervalle en posant $a=m$ et $b=b$
puis en continue comme précédemment

EXEMPLE

Soit f une fonction définie par $f(x)=x^3+2x-1$ On sait que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0,1[$, déterminons un encadrement de α de longueur 0.25

Soit $c_1=\frac{1}{2}$ le centre de l'intervalle $[0,1]$ Comme : $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)>0 \\ f(1)<0 \\ f(1)>0 \end{cases}$

Donc $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ d'amplitude $\frac{1-0}{2}=0.5$

Soit $c_2=\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$ le centre de l'intervalle $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ Comme : $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)>0 \\ f(0)<0 \\ f\left(\frac{1}{4}\right)<0 \end{cases}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Donc $\alpha \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$ d'amplitude $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

VI Fonctions réciproques

Activité

Soit f une fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1$

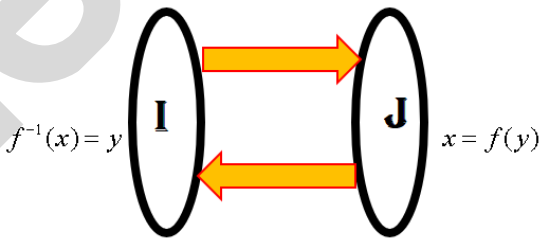
1. Étudier la continuité de f sur I
2. Montrer que f est strictement croissante sur I
3. Calculer $J = f(I)$
4. On considère l'équation $f(y) = x$, montrer que $y = \sqrt{x+1}$
5. Soit g la fonction définie sur J par : $g(x) = \sqrt{x+1}$
   Comparer $f(1)$ et $g(0)$; $f(2)$ et $g(3)$; $f(3)$ et $g(8)$. Que peut-on déduire

Théorème

Si f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors : f admet une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur $J = f(I)$ à valeur dans I et on a :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\forall x \in J)(fof^{-1})(x) = x \\ (\forall x \in I)(f^{-1}of)(x) = x \end{cases}$$



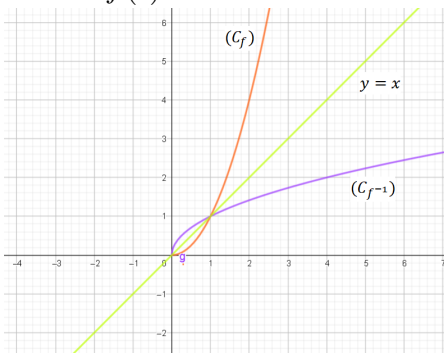
► Si $b \in f(I)$ alors l'équation $f(x) = b$ admet une solution unique dans I

Propriété

Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors :

► $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) les courbe respectivement des fonction f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$

► f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I



Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

1 Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer, puis déterminer une expression de f^{-1} pour tout $x \in J$

- ► $f(x) = x^2 - 2x + 5$ et $I = [1, +\infty[$
- ► $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ et $I =]-\infty, 2[$
- ► $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$ et $I =]-\infty, 0[$
- ► $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ et $I = [0, \sqrt{2}]$

2 On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

a Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}

c Calculer $f^{-1}(x)$ $(\forall x \in J)$

VII Fonction racine n-ème

1 Définition et règle de calcul

Activité

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2 Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

3 En déduire que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

Définition 1.4 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ la fonction $x \longrightarrow x^n$ est continue strictement croissant sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ s'appelle la fonction racine n-ième est se noté $\sqrt[n]{\ }$

Conséquence de la définition :

- La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x} \geq 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$
- La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est continue strictement croissante alors
  - ♦ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
  - ♦ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x} \leq y \Leftrightarrow 0 \leq x \leq y^n$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\sqrt[n]{x})^n = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall p \in \mathbb{N})\ (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = l \geq 0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

Règle de calcul :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}_+^*)\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall p \in \mathbb{N}^*)\ \sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall p \in \mathbb{N}^*)\ \sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}$

Remarque

i) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

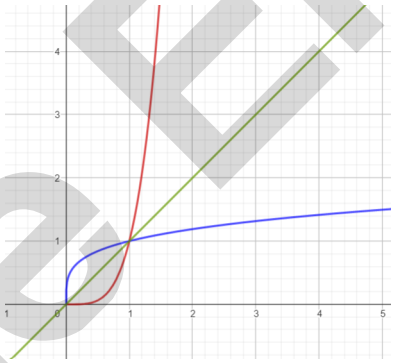
ii) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[1]{x} = x$

La courbe de la fonction $\sqrt[n]{\ }$

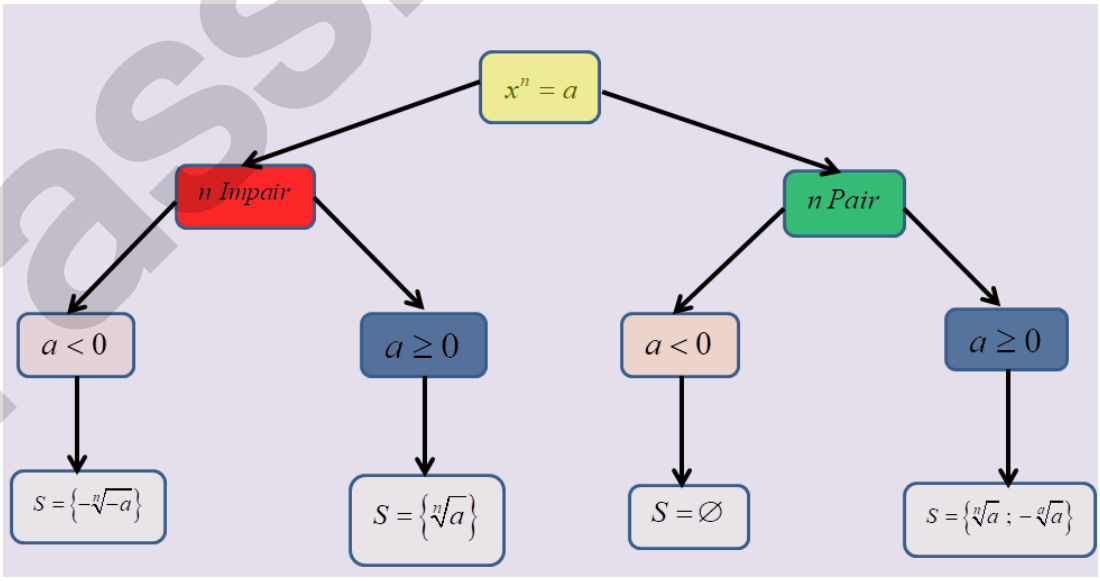
Voici la courbe de la fonction $f : x \to x^4$

sur $[0, +\infty[$ et la courbe de

sa fonction réciproque $f^{-1} : x \to \sqrt[4]{x}$



L'équation $x^n = a$ ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$)



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $x^5 = 1$
- $(x^2-1)^3 = -27$
- $\sqrt[5]{x} - 5\sqrt[10]{x} + 6 = 0$
- $\sqrt[8]{x} - x = 0$
- $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

2 L'expression conjuguai

Ordre 3 :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

Ordre 4 :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}}$$

A remarque qu'on ne peut pas factoriser : $x^4 + y^4$

Application

1 Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}} \times \sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{3}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}}}$$

2 Rendre le dénominateur rationnel :

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2} \qquad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$

3 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{20x^2+7}-3}{x^2+x-2} \ ; \ \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{3x-4}-\sqrt{x}}{x-4} \ ; \ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{20x-4}-2}{2x^2+x-3} \ ; \ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{2x-1}-1}{\sqrt[4]{2x+8}-2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} \ ; \ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} \ ; \ \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{25+x}-3}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Puissance rationnelle

Puissance entier

Soit x un réel et n un entier naturel non nul on a :

$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times .... \times x}_{n \text{ fois}}$ et $x^0 = 1$ si $x \neq 0$

Puissance rationnelle

Propriété

Pour tout réel x et pour tout entier naturel q non nul on a : $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$

Propriété

Soit x un réel et r un rationnel $(r \in \mathbb{Q})$ avec $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on a : $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$

Propriété

Soit x et y deux réels positifs, r et r' deux rationnels on a :

- $x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
- $x^{r \times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
- $x^{-r} = x^r = \frac{1}{x^r}$ $(x \neq 0)$
- $x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}}$
- $(xy)^r = x^r \times y^r$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$ $(y \neq 0)$

Application

Soient x et y deux réels non nuls, simplifier les nombres suivants :

1. $A = \frac{x^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{1}{6}} \times 9^{\frac{3}{4}}}$
2. $B = \frac{(xy)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[6]{x^{-2}}}{x^{\frac{3}{4}} \sqrt[6]{xy}}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 $C = \dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[4]{\frac{x}{y}} \times \sqrt[6]{x^{-4}}}{(yx)^{\frac{1}{4}} \sqrt[12]{xy}}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today